חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

דודו לגזיאל, המרכז הבינתחומי בהרצליה

2014-2016

תקציר

חוברת זו נכתבה כחוברת מתרגל בלבד ולכן ייתכנו (וככל הנראה ישנם..) טעויות ואי דיוקים. האחריות על השימוש בהן היא על המשתמש בלבד! החוברת הוכנה בהתבסס על רשימותיו ותרגוליו המעולים של ד"ר אסף כהן משנים עברו.

תוכן עניינים

1 יסודות: מספרים, משוואות ואי־שיוויונים. 6
1.1 קבוצות 6
1.2 קבוצות מספרים על הישר 6
1.3 משוואות ואי־שיוויונים 8
1.3.1 שורשים 8
1.3.2 בניית הוכחות 11
2 פונקציות, גבולות ורציפות 12
2.1 פונקצית הערך המוחלט 12
2.2 תחום הגדרה טבעי 16
2.3 הרכבת פונקציות 17
2.4 גבולות של פונקציות 18
2.4.1 גבולות כאשר $x \to \pm\infty$. 18
2.4.2 גבולות כאשר $x \to a \in \mathbb{R}$. 22
2.4.3 אריתמטיקה של גבולות 27
2.5 חסימות של פונקציה 30
2.6 גבולות אינסופיים ־ הגבול במובן הרחב 35
2.6.1 גבול אינסופי כאשר $x \to \infty$ 38
2.6.2 סיכום הוכחות גבולות וחסימות 40
2.6.3 משפט הסנדביץ' 42
2.6.4 טבלאות תהליכים גבוליים ־ בכיוונים זהים ומנוגדים. . . 42
2.7 פונקציות טריגונומטריות 44
2.7.1 מעלות ורדיאנים 44
2.7.2 תכונות, ערכים וזהויות טריגונומטריות 45
2.8 פונקציות מעריכיות 50
2.9 רציפות של פונקציה 57
2.9.1 אי רציפות של פונקציה 62
3 נגזרת 66
3.1 אריתמטיקה של נגזרות ונגזרות של פונקציות מוכרות 69
3.2 נגזרת של פונקציה הפוכה 72
3.2.1 תכונות של פונקציות הפיכות 73
3.2.2 נגזרת של פונקציה הפיכה 73
3.3 משפטי נגזרות 79
3.4 מונוטוניות של פונקציות 84
3.5 כלל לופיטל 88
4 חקירת פונקציות 92

4.1 קמירות וקעירות של פונקציות 92
4.2 אסימפטוטות 92
4.3 חקירת פונקציות 95
5 מבחנים ־ אינפי א' 101
5.1 מבחן לדוגמא ־ ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2014. 101
5.1.1 חלק א' 101
5.1.2 חלק ב' 102
5.2 מבחן מועד א' ־ ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2014. 108
5.2.1 חלק א' 108
5.2.2 חלק ב' 110
5.3 מבחן מועד א' ־ ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2015. 118
5.3.1 חלק א' 118
5.3.2 חלק ב' 121
5.4 מבחן מועד ב' ־ ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2015. 129
5.4.1 חלק א' 129
5.4.2 חלק ב' 131
6 סדרות 141
6.1 אריתמטיקה של סדרות מתכנסות 143
6.2 סדרות סכומים חלקיים 148
7 אינטגרלים 151
7.1 אינטגרלים לא מסויימים 151
7.1.1 כללי אינטגרציה בסיסיים 151
7.1.2 אינטגרציה בחלקים 152
7.1.3 שיטת ההצבה 152
7.2 פירוק פולינומים 156
7.3 האינטגרל המסויים 167
7.3.1 תכונות האינטגרל המסויים 169
7.3.2 חישובי שטחים 177
7.4 אינטגרל לא אמיתי 181
8 טורים 185
8.1 סכומים חלקיים וטורים 185
8.1.1 הטור ההרמוני 185
8.1.2 אריתמטיקה של טורים מתכנסים 185
8.2 משפטי השוואה ומבחני התכנסות לטורים 188
8.2.1 זנב של טור מתכנס 188
8.2.2 טורים חיוביים וקריטריוני השוואה בינהם 188
8.3 טורים ואינטגרלים 194

8.4 טורים כלליים 199
8.4.1 טור לייבניץ 200
8.4.2 תרגילים כלליים בטורים 205
8.5 טורי חזקות 211
8.5.1 רדיוס התכנסות 212
8.6 טורי טיילור 220
8.6.1 גזירה ואינטגרציה של טורים 220
8.6.2 טור טיילור של פונקציה 220
8.6.3 טורי טיילור של פונקציות נפוצות 222
8.6.4 חישובי שארית 226
9 פונקציות מרובות משתנים 236
9.1 גבולות ורציפות של פונקציות מרובות משתנים 236
9.2 נגזרות של פונקציות מרובות משתנים 239
9.2.1 נגזרות מסדרים גבוהים של פונקציות מרובות משתנים . 242
9.2.2 מכפלה סקלארית של וקטורים 244
9.2.3 כלל השרשרת 248
9.3 נקודות קיצון מקומיות וכלליות 248
9.4 פונקציות סתומות 251
10 מבחנים - אינפי ב' 254
10.1 תרגילי חזרה למבחן - מבחן לדוגמא ומבחנים ישנים 254
10.2 מבחן מועד א' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2014. 264
10.2.1 חלק א' 264
10.2.2 חלק ב' 265
10.3 מבחן מועד ב' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2014. 276
10.3.1 חלק א' 276
10.3.2 חלק ב' 277
10.4 מבחן מועד מיוחד - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2014. 285
10.4.1 חלק א' 285
10.4.2 חלק ב' 286
10.5 מבחן מועד מיוחד מאוד - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2015. 295
10.5.1 חלק א' 295
10.5.2 חלק ב' 295
10.6 מבחן מועד א' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2015. 305
10.6.1 חלק א' 305
10.6.2 חלק ב' 308
10.6.3 חלק ג' 313
10.7 מבחן מועד ב' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2015. 317

10.7.1 חלק א' 317
10.7.2 חלק ב' 319
10.7.3 חלק ג' 322

1 יסודות: מספרים, משוואות ואי־שיוויונים.

1.1 קבוצות

בין קבוצות ישנם מספר פעולות בסיסיות אותן תכירו בקורס בדידה. תכונה אחת חשובה שאותה נצטרך זו תכונת ההכלה. נניח וישנה קבוצה $A = \{1, 2, 3\}$ וקבוצה אחרת $B = \{1, 2\}$ אזי נשים לב למשפט שכל איבר שנמצא ב־B נמצא גם ב־A. או, בשפה מתמטית, לכל $x \in B$ מתקיים $x \in A$. במקרה זה נגיד ש־B מוכלת ב־A.

הגדרה 1.1 (הכלה בין קבוצות) יהיו צמד קבוצות A, B. קבוצה B מוכלת ב־A (נסמן זאת ב־$B \subseteq A$) אם לכל $x \in B$ מתקיים ש־$x \in A$.

בעזרת הגדרת ההכלה נוכל להגדיר שיוויון בין קבוצות.

הגדרה 1.2 (שיוויון בין קבוצות) יהיו צמד קבוצות A, B. קבוצה B שווה לקבוצה A (ונסמן זאת ב־$B = A$) אם $B \subseteq A$ וגם $A \subseteq B$.

זאת אומרת, קבוצות הן שוות אם כל איבר בקבוצה אחת נמצא בקבוצה השנייה ולהיפך.

1.2 קבוצות מספרים על הישר

ישנן מספר קבוצות של מספרים בהן נעסוק:

- המספרים השלמים (מסומנים ב־ $\mathbb{Z}$), $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$.
- המספרים הטבעיים (מסומנים ב־$\mathbb{N}$) כוללים את כל המספרים השלמים האי־שליליים, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$. לעיתים, המספר 0 לא נכלל בהגדרת הטבעיים (כמו לדוגמא בקורס שלנו).
- המספרים הרציונלים (מסומנים ב־$\mathbb{Q}$) ־ מספר רציונלי הוא מספר הניתן להציג כמנה של מספרים שלמים (כאשר המכנה שונה מ־0) בעוד מספרים אי־רציונלים לא ניתן להציג כמנה של שני מספרים שלמים. לדוגמא: '7' הוא רציונלי מאחר ו־ $7 = \frac{7}{1}$ ונכון הדבר גם עבור $1.3 = \frac{13}{10}$. לעומת זאת המספרים e ו־ π אינם רציונלים ($\pi = 3.14\ldots$ זה היחס הקבוע שבין היקף המעגל לקוטר שלו ו־$e = 2.71\ldots$ הוא הבסיס של הלוגריתם הטבעי ומתקבל מתוך הגבול $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$).
- המספרים הממשיים (מסומנים ב־$\mathbb{R}$) וכוללים את המספרים הרציונלים, $\mathbb{Q}$, והאי־רציונלים. קבוצת המספרים הממשיים כוללת את כל המספרים שיש להם הצגות עשרוניות, לדוגמא: $1.3, 7, 54, \pi, e$ וכד'.

טענה 1.3 יהיו $p, q \in \mathbb{Q}$ שני מספרים רציונלים אזי $p + q$ מספר רציונלי.

הוכחה: אנו צריכים להראות שניתן להציג את $p + q$ כמנה של שני מספרים שלמים. נתון כי $p, q \in \mathbb{Q}$ הם שני מספרים רציונלים ולכן קיימים מספרים שלמים $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $\frac{a}{b} = p, \frac{c}{d} = q$. על כן,

$$p + q = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

נשים לב כי מכפלה של מספרים שלמים נותנת מספר שלם וכנ"ל עבור סכום. מכך נוכל לקבוע כי $\mathrm{a{\cdot}d{+}b{\cdot}c,b{\cdot}d} \in \mathbb{Z}$ הם מספרים שלמים ולכן ניתן להציג את $p+q$ כמנה של שני מספרים שלמים. ■

שאלה טבעית שעולה ממה שראינו עד כה היא מה קורה כאשר מבצעים פעולות אריתמטיות בין מספרים רציונלים ואי־רציונלים, לדוגמא: חיבור או חיסור של מספר רציונלי ואי־רציונלי וכד'.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה.

טענה 1.4 אם $q \in \mathbb{Q}$ ו־ $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אזי $q + r \in \mathbb{Q}$.

הוכחה: יהיו צמד מספרים q, r כאשר q הוא מספר רציונלי ו־r הוא מספר אי־רציונלי וצריך לבדוק האם הסכום $q + r$ הוא רציונלי או לא. במקרה הנוכחי קל להוכיח שמדובר בטענה שקרית באמצעות דוגמא נגדית פשוטה. אם $q = 0$, אזי $q + r = r$ ובגלל ש־r הוא מספר אי־רציונלי נובע גם ש־$q + r$ הוא מספר אי־רציונלי. ■

בעוד ההבדלה בין מספרים שלמים, טבעיים וממשיים היא יחסית אינטואיטיבית, ההבדל בין מספרים רציונלים ואי־רציונלים הוא יותר מורכב. לאחר שהוכחתם בכיתה כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי־רציונלי אנו נוכיח כעת כי גם $\sqrt{3}$ הוא אי־רציונלי.

טענה 1.5 המספר $\sqrt{3}$ הוא אי־רציונלי.

הוכחה: נצטרך להוכיח טענה זאת בשלבים:

<u>שלב א:</u> נוכיח כי אם n^2 מתחלק ב־3 אז גם n מתחלק ב־3. נניח בשלילה שזה לא נכון ולכן $n = 3k - 1$ או $n = 3k - 2$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו. אם $n = 3k - 1$ אזי $\frac{n^2}{3} = 3k^2 - 2k + \frac{1}{3}$ מה שאומר ש־ n^2 לא מתחלק ב־3. סתירה. אם $n = 3k - 2$ אזי $\frac{n^2}{3} = 3k^2 - 4k + \frac{4}{3}$ ושוב n^2 לא מתחלק ב־3. סתירה. לכן בהכרח נובע כי n מתחלק ב־3.

<u>שלב ב:</u> נניח בשלילה כי $\sqrt{3}$ הוא רציונלי ולכן קיימים מספרים שלמים, $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$ (ללא גורמים משותפים) כך ש־

$$\frac{m}{n} = \sqrt{3}.$$

נשים לב שבחרנו את m ו־n בצורה כזאת שאין להם עוד גורם משותף והשבר הנ"ל הוא מצומצם. בעזרת העברת אגפים והעלאה בריבוע נקבל כי,

$$m^2 = 3n^2 \tag{1}$$

ולכן נובע ש־ m^2 מתחלק ב־3. משלב א' אנו יודעים כי גם m מתחלק ב־3 ולכן נוכל להציב $\mathrm{m{=}3k}$ ב־(1) עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו ונקבל ש־ $9k^2 = 3n^2 \Leftarrow n^2 = 3k^2$ ולכן באותו האופן נובע ש־ n^2 וגם n מתחלקים ב־3. קיבלנו שגם m וגם n מתחלקים ב־3 וזה סותר את ההנחה שאין ל־m ו־n גורמים משותפים. סתירה. ■

1.3 משוואות ואי־שיוויונים

נתחיל בתזכורת קטנה מהתיכון בנוגע לפתרון של משוואה ריבועית. נזכיר כי משוואה ריבועית היא משוואה מהצורה

$$.a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

למשוואה מהצורה הזאת יכולים להיות $1, 2$ או 0 פתרונות. הפתרון למשוואה (2) נתון על ידי נוסחה ישירה:

$$.x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3}$$

1.3.1 שורשים

הגדרה 1.6 מספר $x \in \mathbb{R}$ נקרא שורש מסדר n ($n \in \mathbb{N}$ מספר טבעי) של $a \in \mathbb{R}$ (מספר ממשי אי־שלילי) אם־ $x^n = a$.

מבחינת סימונים, אם x הוא שורש מסדר n של $a \in \mathbb{R}$ אז $x = a^{\frac{1}{n}}$.

הערה 1.7 ישנן מספר נקודות שחשוב לשים אליהן לב (הנקודות הללו דורשות הוכחה אך בשלב זה נדלג עליהן):

1. לכל מספר ממשי חיובי $a \in \mathbb{R}$ יש שורש מסדר $n \in \mathbb{N}$.
2. אם $0 > a \in \mathbb{R}$ אז אין לו שורש מסדר זוגי.
3. לכל זוג מספרים x, y ממשיים אי־שליליים ($y > 0$) מתקיים:

$$.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}\quad ,\quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$ אם ורק אם x או y שווים ל־0.

תרגיל 1.8 מצאו את קבוצת הפתרונות של האי־שיוויונים הבאים:

1. $x^2 - 3x \leq 10$.
2. $\frac{x}{x-3} < 4$.

פתרון: נוכיח את צמד הסעיפים לפי הסדר.

1. נשים לב כי $x^2-3x\le 10 \iff x^2-3x-10\le 0$ ולכן נצטרך לפשט את הביטוי בעזרת המשוואה הריבועית $x^2-3x-10=0$. נשתמש ב־(3) בכדי לפתור את המשוואה ונקבל ש־$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm7}{2}=5,-2$.
כעת נוכל לרשום את הפולינום ממעלה שנייה בתור המכפלה $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$ ונשים לב ש־

$$(x-5)(x+2)\le 0$$

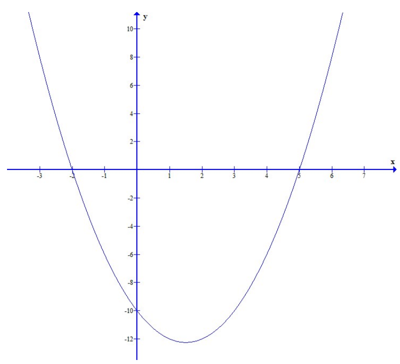
אם ורק אם

$$(x-5)\ge 0\ ,\ (x+2)\le 0$$

או

$$(x-5)\le 0\ ,\ (x+2)\ge 0.$$

האי־שיוויונים הראשונים מתקיימים רק כאשר $5\le x\le -2$, מה שכמובן לא אפשרי. האי־שיוויונים האחרונים מתקיימים כאשר $-2\le x\le 5$ ולכן קבוצת הפתרונות היא $\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 5\}$.



איור 1: פרבולה עם נקודת מינימום

2. נוכל לפתור תרגיל זה בשני אופנים. נשים לב שבכל מקרה $x\neq 3$ מאחר ואז השבר לא יהיה מוגדר.

(א) הדרך הראשונה היא על ידי הכפלת האי־שיוויון ב־$0<(x-3)^2$. נעשה זאת ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-3} &< 4\\ x(x-3) &< 4(x-3)^2\\ x^2-3x &< 4x^2-24x+36\\ 0 &< 3x^2-21x+36\\ 0 &< x^2-7x+12\\ 0 &< (x-3)(x-4)\end{aligned}$$

ולכן, בטכניקה הדומה לתרגיל הקודם, קיבלנו כי קבוצת הפתרונות היא

$$.\{x \in \mathbb{R} | x < 3 \ or \ x > 4\}$$

(ב) הדרך השנייה היא מעט שונה אבל חשובה כדרך עבודה עם אי־שיוויונות (זה יהיה קריטי בהמשך הקורס שנדון בגבולות). בשלב הראשון נרצה להיפטר מן המכנה שיש לנו, אבל מאחר ואיננו יודעים אם המכנה הוא שלילי או חיובי נצטרך לפצל את הפתרון לשני חלקים.

$$\frac{x}{x-3} < 4 \ \Leftrightarrow \ \frac{x-4(x-3)}{x-3} < 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{12-3x}{x-3} < 0$$

i. אם $x < 3$: אזי $x-3 < 0$ ולכן $0 < 12-3x$. נפשט את הביטוי ונעביר אגפים ונקבל ש־ $12 > 3x \Leftarrow x < 4$. לכן, יחד עם ההנחה, הפתרון הוא $x < 3$.

ii. אם $x > 3$: אזי $x-3 > 0$ ולכן $0 > 12-3x$. לאחר פישוט נקבל ש־ $x > 4$, לכן, יחד עם ההנחה, הפתרון הוא $x > 4$.

משילוב צמד התוצאות, אנו מקבלים שקבוצת הפתרונות של האי־שיוויון היא

$$.\{x \in \mathbb{R} | x < 3 \ or \ x > 4\}$$

תרגיל 1.9 יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ מספרים ממשיים כך ש־ $a < b$. הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמא נגדית.

1. אם $a, b \neq 0$ אזי $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
2. אם $b < 0$ אזי $a^2 < b^2$.
3. לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $ax + b(1-x) \in [a, b]$.

פתרון: נענה על כל סעיף בנפרד.

1. משפט זה אינו נכון ונראה זאת בעזרת דוגמא נגדית. נניח כי $b = 2$, $a = -1$. במקרה זה הנתון תקף מאחר ו־ $-1 < 2$ אבל נשים לב כי $\frac{1}{-1} < \frac{1}{2}$.
2. הטענה לא נכונה ונראה זאת בעזרת דוגמא נגדית. נניח כי $b = -1$, $a = -2$ ולכן $a < b$, $b < 0$ אבל $(-1)^2 = 1 < 4 = (-2)^2$.
3. הטענה נכונה. אנחנו צריכים להראות ש־ $a \leq ax + b(1-x) \leq b$ ונעשה זאת על ידי הוכחת כל אי שיוויון בנפרד. עבור אי השיוויון הימני נשים לב כי,

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \quad / \cdot (a-b) \\ x(a-b) &\leq 0 \\ ax - xb + b &\leq b \\ ax + b(1-x) &\leq b \end{aligned}$$

חשוב לשים לב לאופן ההוכחה. אנחנו תמיד מתחילים מנתון ומגיעים למה שצריך להוכיח. טעות נפוצה היא שמתחילים במה שצריך להוכיח ובסוף מגיעים לפסוק אמת ־ זו לא הוכחה!!! הוכחה כזאת תקפה רק אם כל המעברים הם דו־כיווניים ולרוב זה לא המצב (ראו הסבר בהמשך). לכן תמיד תתחילו בנתונים ותסיימו במה שצריך להוכיח. לא ניתן להשתמש במה שצריך להוכיח כנתון אלא אם כן מוכיחים על דרך השלילה. עבור האי־שיוויון השני נראה כי

$$\begin{aligned}
x &\leq 1 \\
1-x &\geq 0 \quad / \cdot (b-a) \\
(b-a)(1-x) &\geq 0 \\
ax-a+b(1-x) &\geq 0 \\
ax+b(1-x) &\geq a
\end{aligned}$$

ובזאת הוכחנו את הטענה השלישית.

1.3.2 בניית הוכחות

ישנה דוגמא פשוטה לשאלה "מדוע כשרוצים להוכיח משהו מתמטית אי אפשר (לרוב...) להתחיל ממה שצריך להוכיח ולהגיע לפסוק אמת?". נניח שמבקשים מכם להוכיח ש־ $1=2$. כמובן שזה לא נכון ולכן לא ניתן להוכיח את זה, אבל אם נתחיל מהפסוק שקר הזה ונבצע את הפעולה הבאה על צמד האגפים נגיע לפסוק אמת.

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \quad / \cdot 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

ובאופן לא מתפיע קיבלנו פסוק אמת. אבל, מאחר ואנו יודעים ש־1 ו־2 הם שני מספרים שונים אזי כנראה יש בעיה בהוכחה וזו בדיוק אותה הבעיה שחוזרת על עצמה כאשר מנסים להתחיל במה שצריך להוכיח ולסיים בפסוק אמת. ניתן לעשות את זה עבור כל משוואה או אי שיוויון ולכן לרוב לא נעשה זאת (ניתן לעשות זאת אם כל המעברים הם דו־כיווניים, מעברים של "אם ורק אם").

2 פונקציות, גבולות ורציפות

פונקציה זה אובייקט מתמטי שמתאים לכל איבר בקבוצה אחת איבר יחיד בקבוצה שנייה. לדוגמא, $f:A\to B$ היא פונקציה מקבוצה A לקבוצה B שלוקחת כל איבר מ־A ומחזירה איבר אחר מ־B. לרוב אנו נסתכל על פונקציות ממשיות שלוקחות מספר מ־$\mathbb{R}$ ומחזירות מספר מ־ $\mathbb{R}$ גם כן. לדוגמא: $f(x)=x^2$ היא פונקציה שלוקחת מספר ממשי ומחזירה את המספר בחזקת 2 או לחילופין $g(x)=x+1$ שלוקחת מספר ממשי ומגדילה אותו ב־1.

אם $f:A\to B$ היא פונקציה אזי

- הקבוצה $A=dom(f)$ נקראת התחום של הפונקציה.
- הקבוצה $B=range(f)$ נקראת הטווח של הפונקציה.
- הקבוצה $image(f)=\{b\in B|\exists a\in A\ :\ f(a)=b\}$ נקראת התמונה של הפונקציה.

הגדרה 2.1 פונקציה ממשית היא פונקציה שגם התחום שלה וגם התמונה שלה הם תת־קבוצות של המספרים הממשיים.

דוגמא לפונקציה ספציפית שכבר פגשנו היא הפרבולה.

הגדרה 2.2 פולינום ממעלה 2 זו פונקציה מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ מהצורה הבאה $p(x)=ax^2+bx+c$ כאשר $0\neq a\in\mathbb{R}, b,c\in\mathbb{R}$.

כמו שכבר ראיתם בתיכון, לפולינום ממעלה שנייה קוראים גם "פרבולה" והסימן של המקדם $0\neq a\in\mathbb{R}$ קובע אם יש לה נקודת מינימום או נקודת מקסימום.

2.1 פונקצית הערך המוחלט

הגדרה 2.3 פונקצית הערך המוחלט היא הפונקציה המסומנת ומוגדרת באופן הבא:

$$|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}\tag{4}$$

הערה 2.4 <u>תכונות הערך המוחלט</u>:

1. $|x|\geq 0$.
2. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.
3. אי־שוויון המשולש - $|x+y|\leq|x|+|y|$.
4. הכללה של אי שיוויון המשולש - $|\sum_{i=1}^{n}x_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

תרגיל 2.5 פתרו את האי־שוויון $|2x+3|>5$.

פתרון: נפצל לשני המצבים האפשריים מבחינת הביטוי שבתוך הערך המוחלט.

1. אם הביטוי שבתוך הערך המוחלט הוא חיובי זה אומר ש־ $x > 1 \;\Leftarrow\; 2x+3>5$. בשילוב עם התנאי $2x+3>0$ נקבל $x>1$.
2. אם הביטוי שבתוך הערך המוחלט הוא שלילי (קרי , $x<-\frac{3}{2} \Leftarrow 2x+3<0$) זה אומר ש־

$$-4>x \;\Leftarrow\; -8>2x \;\Leftarrow\; -2x-3>5,$$

והפתרון הכללי הוא כל הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}|x<-4\}\cup\{x\in\mathbb{R}|x>1\}$.

טענה 2.6 לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

1. $|x-y|\geq|x|-|y|$.
2. $|x-y|\geq|(|x|-|y|)|$.
3. $|x+y|\geq|x|-|y|$.

הוכחה: נתחיל בהוכחת הטענה הראשונה (הטענה השנייה תנבע ממנה באופן מיידי).
נזכור כי הוכחנו את אי־שוויון המשולש שאומר שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$|a+b|\leq|a|+|b|.$$

נוכל להשתמש באי־שוויון זה על מנת להוכיח את הטענה הראשונה. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ מספרים ממשיים כלשהם ונגדיר בעזרתם $a=x-y$, $b=y$. שימו לב לנקודה בה התחלתי ־ "יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ מספרים ממשיים כלשהם..." ־ בכל פעם שמבקשים מאיתנו להוכיח טענה עבור <u>כל ערך כלשהו</u> אז צריך להתחיל בכך שקובעים ערך שרירותי וזאת עושים בעזרת השורה הנ"ל. נציב את ההגדרה שלנו באי־שוויון המשולש ונקבל

$$\begin{aligned} |x-y+y| &\leq |x-y|+|y| \\ |x-y+y|-|y| &\leq |x-y| \\ |x|-|y| &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

מה שמוכיח את הטענה הראשונה.
טענה שנייה ־ אם $|x|\geq|y|$ אז $|(|x|-|y|)|=|x|-|y|$ וזה בדיוק מה שהוכחנו לעיל. לכן נותר לנו להתייחס למקרה שבו $|x|<|y|$. מאחר ובחירת x,y היא שרירותית ומה שהוכחנו בטענה הראשונה נכון לכל בחירה שרירותית כזאת נובע גם ש־

$$|y|-|x|\leq|y-x|,$$

ואגף ימין שווה ל־ $|x-y|=|y-x|$. על כן נובע ש־ $|y|-|x|\leq|x-y|$ ולכן לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$|y|-|x|\leq|x-y|$$

וגם

$$|x|-|y|\leq|x-y|,$$

מה שמוכיח את הטענה השנייה.
טענה שלישית ־ ניקח את מה שהוכחנו בטענה הראשונה ונציב במקום y את $-y$ ונקבל

$$\begin{aligned}|x-(-y)| &\geq |x|-|-y|\\ |x+y| &\geq |x|-|-1|\cdot|y|\\ |x+y| &\geq |x|-|y|\end{aligned}$$

כנדרש בהוכחה. ∎

טענה 2.7 לכל זוג מספרים ממשים $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\max\{x,y\}=\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$.

הוכחה: יהיו זוג מספרים ממשיים $x,y\in\mathbb{R}$ ונניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) ש־$x\geq y$.
נראה כי שני האגפים שווים זה לזה ולכן השוויון נובע.
אגף ימין: $\max\{x,y\}=x$.
אגף שמאל: $\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)=\frac{1}{2}\left(x+y+x-y\right)=\frac{1}{2}\left(2x\right)=x$.
לכן אגף ימין ואגף שמאל שווים והשוויון נובע. ∎

טענה 2.8 נניח כי $x\geq 0$ ולכל מספר חיובי ϵ מתקיים $x\leq\epsilon$. הוכיחו כי $x=0$.

הוכחה: נוכיח על דרך השלילה. נניח בשלילה ש־ $x>0$ ונסתכל על $\frac{x}{2}$. אם $x>0$ אזי $\frac{x}{2}>0$ ומן הנתון נובע שלכל מספר חיובי ϵ מתקיים $x\leq\epsilon$. על כן,

$$\begin{aligned}x &\leq \frac{x}{2}\\ 2x &\leq x\\ x &\leq 0\end{aligned}$$

וקיבלנו סתירה להנחה ש־ $x>0$ לכן נובע ש־ $x=0$. שימו לב ש־$x=0$ מקיים את התנאי הנתון בשאלה ולכן איננו נמצאים במצב בו הטענה איננה נכונה. ∎

תרגיל 2.9 פתרו את האי־שיוויון הבא:

$$3|x-2|+x=8$$

פתרון: נצטרך לפצל את הערך המוחלט לשני חלקים: $x-2<0$ ו־ $x-2\geq 0$.

1. אם $x\geq 2$ אז

$$\begin{aligned} 3|x-2|+x &= 8 \\ 3x-6+x &= 8 \\ 4x &= 14 \\ .x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

2. אם $x<2$ אז

$$\begin{aligned} 3|x-2|+x &= 8 \\ -3x+6+x &= 8 \\ -2x &= 2 \\ .x &= -1 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא: $x=-1$ או $x=3\frac{1}{2}$.

תרגיל 2.10 מצאו את קבוצת הפתרונות של המשוואה $|x+3|+3|x-2|=9$.

פתרון: במקרים כאלה נדרש לפרק את הפתרון למספר חלקים.

- $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$: במצב זה המשוואה המתקבלת היא

$$\begin{aligned} x+3+3(x-2) &= 9 \\ 4x-3 &= 9 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

וזה עונה לתנאי הראשוני ש־$x\geq 2$.

- $-3<x<2$: לכן נקבל את המשוואה .

$$\begin{aligned} x+3+3(-x+2) &= 9 \\ -2x+9 &= 9 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

וגם תוצאה זו עונה לתנאי הראשוני $-3<x<2$.

- $x \le -3$: זהו התחום האחרון אותו נצטרך לבחון והמשוואה המתקבלת ממנו היא

$$\begin{aligned} -x-3+3(-x+2) &= 9 \\ -4x+3 &= 9 \\ -4x &= 6 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ובמקרה זה התוצאה איננה עיקבית עם התחום הראשוני ולכן אין פתרון בתחום הנ"ל.
על כן, קבוצת הפתרונות של המשוואה היא $\{x \in \mathbb{R} | x = 3 \ or \ x = 0\}$.

2.2 תחום הגדרה טבעי

הגדרה 2.11 תחום הגדרה טבעי של פונקציה זהו תחום ההגדרה המקסימאלי עליו ניתן להגדיר את הפונקציה.

איפה לרוב נמצא את הבעיות בתחומי ההגדרה?

1. חלוקה ב־0.
2. ביטוי שלילי בתוך שורש.

דוגמאות לתחומי הגדרה:

1. תחום ההגדרה של פולינום ממעלה 2, פרבולה, הוא כל הציר הממשי מאחר וכל מספר ממשי ניתן להכפיל בעצמו ועדיין לקבל מספר ממשי (לפי תכונות של מספרים ממשיים).
2. תחום ההגדרה של פונקצית השורש, $f(x)\sqrt{x}$, זה הקרן $\{x \in \mathbb{R} | x \ge 0\} = [0, \infty)$ מאחר וכל מספר אי־שלילי ניתן לקבל על ידי העלאה בריבוע של מספר אחר. לעומת זאת, מספר שלילי לא ניתן לקבל כריבוע של מספר וזאת אנו יודעים כי $0 \le x^2$. לדוגמא: הביטוי $\sqrt{-1}$ לא מוגדר על הישר הממשי.
3. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ הוא הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} | x \ne 0\}$מאחר והביטוי $\frac{1}{0}$ אינו מוגדר על הישר הממשי.

תרגיל 2.12 מצאו את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x}{|2x+3|}}$.
2. $g(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x}{2x+3}}$.

פתרון: נענה על כל סעיף בנפרד.

1. ישנם שני תנאים שצריכים להתקיים בכדי ש־$f(x)$ יהיה מוגדר על הציר הממשי:

(א) המכנה, $|2x+3|$, צריך להיות שונה מ־0 על כן $2x+3\neq 0 \;\Leftrightarrow\; x\neq -1.5$.

(ב) הביטוי שבתוך השורש, $\frac{x^2+2x}{|2x+3|}$, צריך להיות אי־שלילי ומאחר והמכנה תמיד אי־שלילי, נדרוש כי

$$x^2+2x\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+2)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\leq -2 \;\vee\; x\geq 0.$$

לסיכום, תחום ההגדרה הטבעי הוא $\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq 0\ or\ x\leq -2\}$.

2. באופן דומה לסעיף הקודם, אנחנו צריכים תחילה לדרוש כי $x\neq -1.5$ בכדי שהמכנה יהיה שונה מ־0. הדרישה השנייה (בנוגע לאי־שליליות כלל הביטוי) מצריכה יותר עבודה משום שהמכנה יכול להיות שלילי ב־$g(x)$.

$$\frac{x^2+2x}{2x+3}\geq 0.$$

נבחן שתי אפשרויות משלימות זו לזו:

(א) אם $2x+3\geq 0$ אז נוכל להכפיל האי־שוויון בביטוי זה ונקבל את התנאים הבאים - $x\geq -1.5$ וגם $x^2+2x\geq 0$. בהתאם למה שמצאנו בסעיף הקודם לאחר פישוט נקבל ש־ $x\geq -1.5$ וגם $x\geq 0\ or\ x\leq -2$. השילוב של $x\geq -1.5$ יחד עם $x\leq -2$ כמובן אינו אפשרי ולכן נותרנו עם התנאי היחיד, $x\geq 0\ \wedge\ x\geq -1.5$, קרי $x\geq 0$.

(ב) אם $2x+3\leq 0$ (או לחילופין $x\leq -1.5$) נדרוש גם ש־ $x^2+2x\leq 0$. הביטוי האחרון מתרחש אם ורק אם $-2\leq x\leq 0$ ושילובם נותן לנו $-2\leq x\leq -1.5$.

לסיכום, קיבלנו כי תחום ההגדרה הטבעי הוא $\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq 0\ or\ \ -2\leq x<-1.5\}$.

2.3 הרכבת פונקציות

במקרים רבים, כאשר ישנה פונקציה $f:A\to B$ ופונקציה $g:B\to C$ נוכל להגדיר את ההרכבה שלהן המסומנת על ידי $h=g\circ f,\ h:A\to C$ ומוגדרת כ־ $h(x)=g(f(x))$.

דוגמה 2.13 אם $f(x)=x^2$ ו־$g(x)=|x|$ אזי $h_1(x)=\left|x^2\right|$ היא ההרכבה $h_1=g\circ f$ ו־$h_2=|x|^2$ היא ההרכבה $h_2=f\circ g$.

הערה 2.14 כאשר מסתכלים על הרכבת פונקציות, $f\circ g$, ומעוניינים למצוא את תחום ההגדרה הטבעי של ההרכבה ישנן 2 דרישות בהן נצטרך לעמוד:

1. x צריך להיות בתחום ההגדרה הטבעי של g.
2. $g(x)$ צריך להיות בתחום ההגדרה הטבעי של f.

תרגיל 2.15 יהיו הפונקציות $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\sqrt{x},\ h(x)=x^2$, מצאו נוסחה להרכבות הבאות וקבעו מהו תחום ההגדרה הטבעי של כל הרכבה.

1. $g \circ h$.
2. $h \circ g$.
3. $f \circ f$.
4. $f \circ h \circ g$.

פתרון: עבור כל סעיף נרשום את הביטוי המפורש של הפונקציה ואת תחום ההגדרה הטבעי.

1. $g\left(h\left(x\right)\right)=g\left(x^2\right)=\sqrt{x^2}=x$ ותחום ההגדרה הטבעי במקרה זה הוא $\mathbb{R}$.
2. $h\left(g\left(x\right)\right)=h\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ ותחום ההגדרה הטבעי במקרה זה הוא $\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$.
3. $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$ ותחום ההגדרה הטבעי במקרה זה הוא $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 0\}$.
4. $f\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right)=f\left(h\left(\sqrt{x}\right)\right)=f\left(\sqrt{x}^2\right)=\frac{1}{\sqrt{x}^2}=\frac{1}{x}$ ותחום ההגדרה הטבעי במקרה זה הוא $\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$.

2.4 גבולות של פונקציות

2.4.1 גבולות כאשר $x\to\pm\infty$.

הגדרת הגבול הינה אחד האלמנטים המרכזיים בו עוסקים בקורס חשבון אינפיטיסימלי. מאחר וההגדרה קיימת במספר תצורות והיא יחסית מורכבת, אנו נתחיל בהגדרה יחסית פשוטה והיא ההגדרה שעוסקת בגבול כאשר $x\to\pm\infty$.

הגדרה 2.16 תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ומספר ממשי $L\in\mathbb{R}$. אם לכל $\epsilon>0$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|<\epsilon$ אזי נגיד שהפונקציה שואפת ל־L באינסוף ונסמן זאת על ידי $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L$.

באותו האופן ניתן להגדיר את הגבול ב־$-\infty$.

הגדרה 2.17 תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ומספר ממשי $L\in\mathbb{R}$. אם לכל $\epsilon>0$ קיים $M<0$ כך שלכל $x<M$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|<\epsilon$ אזי נגיד שהפונקציה שואפת ל־L במינוס אינסוף ונסמן זאת על ידי $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L$.

שימו לב כי ישנו דימיון רב להגדרת הגבול שראינו עד כה, אולם הפעם אנחנו לא מסתכלים על ערכי ה־x הקרובים לערך כלשהו עד כדי δ אלא מסתכלים על כל ערכי ה־x שגדולים (או קטנים) מערך כלשהו.

תרגיל 2.18 הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-100}=0$.

פתרון: את התרגילים הראשונים נפתור בשני שלבים. השלב הראשון יהיה שלב הסקיצה ובו למעשה נראה כיצד אנו בונים את ההוכחה. השלב השני יהיה ההוכחה עצמה. הוכחות גבול מתחילות כמעט תמיד במשפט: "יהי $\epsilon > 0$". הסיבה היא יחסית פשוטה. ההגדרה מתבססת על תנאי שמתקיים עבור כל $\epsilon > 0$ ולכן צריך להניח שקיים איזשהו ערך כזה ולהראות שהתנאי של ההגדרה מתקיים. נבחר $\ldots = M > 0$ כאשר בהמשך החישובים נמצא את הערך המתאים לבעיה. עבור כל $x > M$ נקבל ש־

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x-100} - 0\right| = \left|\frac{1}{x-100}\right| = \frac{1}{|x-100|},$$

אנו צריכים לדרוש שהביטוי מימין יהיה קטן מ־ϵ. נמצא את התנאי על x לשם כך:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x-100|} &< \epsilon\\ \frac{1}{\epsilon} &< |x-100|\\ \frac{1}{\epsilon} < x-100 \quad &or \quad x-100 < -\frac{1}{\epsilon}\end{aligned}$$

מאחר ואנחנו מחפשים את הגבול כאשר $x \to \infty$ ניקח את התנאי השמאלי, קרי $x > 100 + \frac{1}{\epsilon}$ ונראה שעבור $M = 100 + \frac{1}{\epsilon}$ מתקבלת התוצאה הרצויה. כעת נעובר לנסח זאת בהוכחה.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נבחר $0 < M = 100 + \frac{1}{\epsilon}$, נסתכל על $x > M$ ונקבל

$$\begin{aligned}|f(x) - L| &= \left|\frac{1}{x-100} - 0\right| = \left|\frac{1}{x-100}\right| = \frac{1}{|x-100|} =\\ &= \frac{1}{x-100}.\end{aligned},$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־$x > 100$. נשים לב ש־

$$\begin{aligned}x &> 100 + \frac{1}{\epsilon}\\ x-100 &> \frac{1}{\epsilon}\\ \epsilon &> \frac{1}{x-100},\end{aligned}$$

ולכן לכל $x > M$ מתקיים ש־

$$|f(x) - L| = \frac{1}{x-100} < \epsilon,$$

כנדרש. ■

תרגיל 2.19 הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x^2} = 2$.

פתרון: בתרגיל הנוכחי נרשום את ההוכחה באופן ישיר ובאמצע נבצע מספר עצירות לטובת חישובים שבד"כ לא יופיעו בהוכחה הפורמאלית. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\ldots = M < 0$, נסתכל

על $x<M$ ונקבל

$$\begin{aligned}|f(x)-L| &= \left|\frac{2x^2+1}{x^2}-2\right|=\left|\frac{2x^2+1-2x^2}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x^2}\right|= \\ &= \frac{1}{x^2}.\end{aligned},$$

חישוב צדדי / סקיצה: אנחנו רוצים לייצר מצב שבו $\frac{1}{x^2}<\epsilon$ ולכן נדרוש ש־ $x^2>\frac{1}{\epsilon}$, זאת אומרת $x<M=-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. נחזור כעת לתחילת ההוכחה ונרשום $M=-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ במקום המתאים.
המשך הוכחה: נשים לב ש־ $x<M=-\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ ולכן $\frac{1}{x^2}<\epsilon$ ובפרט מתקבל ש־

$$|f(x)-L| = \frac{1}{x^2}<\epsilon,$$

כנדרש.

תרגיל 2.20 הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-2x}=5$.

פתרון: שימו לב שייתכן ואתם יכולים לחשב את הגבול באופן ישיר, לדוגמא:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)} \\ &= \frac{5+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)}=\frac{5+0}{1-0}=5\end{aligned}$$

הבעיה היא שחישוב זה מצריך הרבה הנחות ומשפטים שלא הוכחנו ואליהם נגיע רק בהמשך.
כעת נעבוד רק עם הגדרת הגבול. נוכיח בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-2x}=5$.
יהי $\epsilon>0$ נסתכל על כל ה־x־ כך ש־ $x>M=...$ (נקבע את M בהמשך בהתאם לתנאים שיופיעו בשאלה).

$$\begin{aligned}|f(x)-L| &= \left|\frac{5x^2+x}{x^2-2x}-5\right|=\left|\frac{5x+1}{x-2}-5\right|=\left|\frac{5x+1-5x+10}{x-2}\right|=\left|\frac{11}{x-1}\right|= \\ &= 11\cdot\frac{1}{|x-1|}\end{aligned}$$

בשלב זה נוכל לרשום סקיצה בצד שלפיה נבחר את M. אנו מעוניינים שיתקיים $\frac{11}{|x-1|}<\epsilon$.
נשים לב שזה אפשרי אם $\frac{11}{\epsilon}<|x-1|$. לכן, אם מתקיים ש־ $x>1+\frac{11}{\epsilon}$, אז בפרט

$$\begin{aligned}x-1 &> \frac{11}{\epsilon} \\ |x-1| &> \frac{11}{\epsilon} \\ \epsilon &> \frac{11}{|x-1|}\end{aligned}$$

על כן, נוכל כעת לחזור ולקבוע $M=1+\frac{11}{\epsilon}$ ולקבל ש־

$$|f(x)-L| = 11\cdot\frac{1}{|x-1|}=11\cdot\frac{1}{x-1}<\epsilon$$

לפי $x>1+\frac{11}{\epsilon} \Leftarrow x-1>\frac{11}{\epsilon} \Leftarrow \epsilon>\frac{11}{x-1}$.

תרגיל 2.21 ידוע ש־ $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ הוכיחו כי קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $f(x)>-1$.

פתרון: נתון שהגבול קיים ולכן נוכל לבחור $\epsilon=\frac{1}{2}>0$ וידוע לפי ההגדרה שקיים $M>0$ כך שלכל $x>M$, מתקיים

$$\begin{aligned}|f(x)-L| \quad &< \quad \epsilon=\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}< \quad f(x)-0 \quad &< \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}+0< \quad f(x) \quad &< \frac{1}{2}+0\end{aligned}$$

ובפרט קיבלנו שלכל $x>M$ מתקיים $f(x)>-\frac{1}{2}>-1$ כנדרש.

תרגיל 2.22 הוכיחו כי לפונקציה הבאה לא קיים גבול כאשר $x\to\infty$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$$

פתרון: נניח בשלילה שקיים גבול כלשהו L. לכן, בגלל שקיים גבול אז הגדרת הגבול מתקיימת ובפרט אפשר לבחור $\epsilon=\frac{1}{2}>0$ ולפי הגדרת הגבול קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$,

$$\begin{aligned}|f(x)-L| \quad &< \quad \epsilon=\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}< \quad f(x)-L \quad &< \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}+L< \quad f(x) \quad &< \frac{1}{2}+L\end{aligned}$$

נשים לב שלכל $M>0$ נוכל לקחת $x_1>M$ רציונלי ו־$x_2>M$ אי־רציונלי. צמד הערכים הללו מקיימים את האי־שיוויונים הקודמים ולכן מתקיים ש־

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}+L< \quad f(x_1)=1 \quad &< \frac{1}{2}+L\\ -\frac{1}{2}+L< \quad f(x_2)=0 \quad &< \frac{1}{2}+L\end{aligned}$$

בפרט, על ידי העברת אגפים נקבל ש־

$$\frac{1}{2} < L$$

מהחלק הימני של האי־שיוויון הראשון, ובנוסף,

$$L < \frac{1}{2}$$

מהחלק השמאלי של האי־שיוויון השני. סתירה.

2.4.2 גבולות כאשר $x \to a \in \mathbb{R}$.

בעבר (לימודי תיכון, מכנה וכו') ראינו את הגדרת הגבול בצורה כזו או אחרת, בייחוד כאשר דנו באסמפטוטיקה של פונקציות. מושג הגבול והשאיפה לנקודה הינם דברים יחסית אינטואיטיביים ובנוסף, בכל הפעמים בהן נפגשנו במושגים אלו עד כה, השימושים די חזרו על עצמם ולכן לא היינו צריכים להתעמק בדקויות ובהגדרות. כעת אנו עומדים להגדיר במדוייק את מושג הגבול ונתחיל בדיון על הגבול של פונקציה בנקודה.

ההגדרה של גבול של פונקציה בנקודה נוטה להיות אחד החלקים הקשים לסטודנטים המתחילים לימודים אקדמיים. השימוש בכמתים השונים, הדרישות הניגודיות ואופן קביעת הערכים המדוייקים אינם פשוטים בהתחלה, אולם לשם כך ישנן מספר רב של דוגמאות ותרגילים בכדי להתרגל למושגים הללו.

הגדרה 2.23 סביבה ϵ של נקודה $a \in \mathbb{R}$ זה הקטע $(a+\epsilon, a-\epsilon)$. סביבה של הנקודה $a \in \mathbb{R}$ זה קטע פתוח כלשהו (c, d) כך ש־ $a \in (c, d)$.

אנחנו נשתמש רבות במונח סביבה ולכן חשוב להפנים אותו היטב.

הגדרה 2.24 תהי פונקציה ממשית $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה $a \in \mathbb{R}$ ויהי מספר ממשי $L \in \mathbb{R}$. אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$, אזי L הוא הגבול של הפונקציה בנקודה a.

אם אכן L הוא הגבול של הפונקציה f בנקודה a, נסמן זאת ע"י

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \,. \tag{5}$$

הערה 2.25 שימו לב כי ההגדרה כלל לא דורשות שהפונקציה תהיה מוגדרת בנקודה a והיא כלל לא מתייחסת לערך של הפונקציה בנקודה זו. בנוסף, ניתן לנסח את התנאי $0 < |x-a| < \delta$ גם בצורה $x \in (a+\delta, a) \cup (a, a-\delta)$.

הגדרה 2.24 מתארת מצב בו לכל ϵ קטן, ככל שנרצה, נוכל לבחור קטע כלשהו על ציר X שתוחם את הנקודה a משני צידיה (אך לא בהכרח מכיל אותה) כך שבכל נקודה בקטע הזה, הפונקציה לא תתרחק ביותר מ־ϵ מהערך L. מה שאנו למעשה מעוניינים בו מתבצע במספר שלבים:

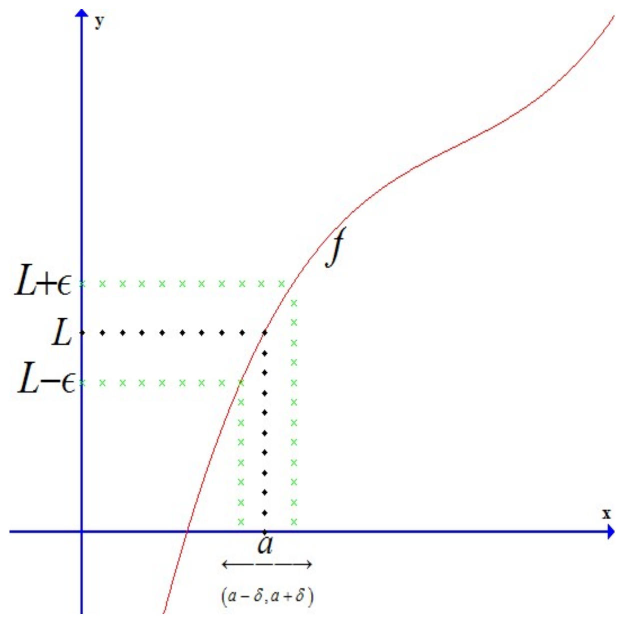
1. יהי $\epsilon > 0$.

2. נגדיר $0<\delta=\ldots$ ונשאיר מקום ריק בכדי שלאחר מכן נקבע את הערך שמתאים לנו בשביל ההוכחה.

3. נתחיל לחסום את $|f(x)-L|$ מלמעלה בשלבים עד שנקבל לבסוף פונקציה של δ. את החסמים השונים נקבל מתוך התנאי הראשוני $0<|x-a|<\delta$.

4. נקבע את δ כך שהתוצאה הסופית תהיה $|f(x)-L|<\epsilon$.

איור 2 בעמוד 23 מדגים בצורה מדוייקת את הכוונה בהגדרה ובתחום.



איור 2: גבול של פונקציה בנקודה

תרגיל 2.26 השתמשו בהגדרת הגבול בכדי להוכיח כי

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \,.$$

לפני ההוכחה נתחיל בהסבר קטן. תרגילים מסוג זה כדאי להתחיל בסקיצה / הכנה להוכחה כפי שנעשה כעת ולאחר מכן לרשום את ההוכחה בצורה מפורטת.

מאחר וההגדרה דורשת כי היא תתקיים "לכל ϵ" אנחנו נפתח ב־ "יהי $\epsilon>0$". נקבע כעת את $\delta=\ldots$ ונסתכל על כל הנקודות x כך ש־ $0<|x-2|<\delta$. נשתמש ב־δ בכדי למצוא חסמים בהמשך. אנחנו מעוניינים לחסום את $\left|x^2-4\right|$ על ידי ϵ ולכן נתחיל מביטוי זה.

נוכל, לשם כך, להיעזר בטענות ומשפטים שהוכחנו בעבר, כמו אי־שוויון המשולש וכד'. נזכור כי בחרנו את כל הערכים המקיימים $0<|x-2|<\delta$.

$$\left|x^2-4\right| = \left|(x-2)(x+2)\right| \le |x-2|\cdot|x+2| < \delta\cdot|x+2| \qquad (6)$$

בשלב זה אנו מעוניינים למצוא חסם כלשהו על $|x+2|$ ולכן ניקח את התנאי עבור x, $0<|x-2|<\delta$ ונמצא בעזרתו את מה שאנחנו צריכים.

$$\begin{array}{rcl} 0< & |x-2| & <\delta \\ 2-\delta< & x & <2+\delta \\ .4-\delta< & x+2 & <4+\delta \end{array}$$

אם נניח כי $\delta \le 1$ אזי נקבל את התנאי ש־ $3 < |x+2| < 5$ ונוכל להציב זאת כעת במשוואה (6) ונקבל,

$$.\left|x^2-4\right| < \delta\cdot|x+2| \le 5\delta \qquad (7)$$

כל מה שנותר לנו כעת זה לבחור את δ בצורה כזאת שהביטוי שבאגף הימני באי־שוויון (7) יהיה קטן מ־ϵ בנוסף לתנאי $\delta \le 1$. לשם כך נבחר את δ להיות $\delta=\min\left\{1,\frac{\epsilon}{5}\right\}$ ואז

$$,\left|x^2-4\right| < \delta\cdot|x+2| \le 5\delta \le 5\frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

ומצאנו $\delta>0$ כך שלכל $\epsilon>0$ מתקיים שאם x בסביבת δ של 2 אזי $\left|x^2-4\right| < \epsilon$, כנדרש.
לאחר שמצאנו לכל $\epsilon>0$ את ה־$\delta>0$ הרלוונטי נוכל לרשום את ההוכחה בצורה מסודרת.
הוכחה: יהי $\epsilon>0$ נגדיר $\delta=\min\left\{1,\frac{\epsilon}{5}\right\}$ ונקבל שלכל $0<|x-2|<\delta$ מתקיים

$$,\left|x^2-4\right| = |x-2|\cdot|x+2| < \delta\cdot 5 \le \epsilon$$

כאשר השתמשנו בתנאים

$$\begin{array}{rcl} 0< & |x-2| & <\delta \\ 2-\delta< & x & <2+\delta \\ .3<4-\delta< & x+2 & <4+\delta<5 \end{array}$$

■

תרגיל 2.27 השתמשו בהגדרת הגבול בכדי להוכיח כי

$$.\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{x+1}=2$$

נפתח באותו האופן כמו קודם לכן (כטיוטת הוכחה) ונקבע ־ יהי $\epsilon > 0$, נגדיר $0 < \delta = \ldots$ ונבחן את התנאי עבור כל ערכי ה־x כך ש־ $0 < \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \delta$. נתחיל במציאת חסם עליון כנדרש על פי הגדרת הגבול.

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x+1} - 2\right| &= \left|\frac{-2x-1}{x+1}\right| \\ &= 2 \cdot \left|\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}\right| \\ &= 2 \cdot \left|\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x+1}\right| \\ &= 2 \cdot \frac{1}{|x+1|} \cdot \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| \\ &< 2 \cdot \frac{1}{|x+1|} \cdot \delta \end{aligned}$$

כעת, נרצה למצוא חסם על $\left|\frac{1}{x+1}\right|$ ולכן

$$\begin{array}{rcl} 0 < & \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| & < \delta \\ -\frac{1}{2} - \delta < & x & < -\frac{1}{2} + \delta \\ \frac{1}{2} - \delta < & x+1 & < \frac{1}{2} + \delta \end{array}$$

נניח כי $\delta \leq \frac{1}{4}$ ולכן נקבל ש־ $\frac{1}{4} < x+1 < \frac{3}{4} \Leftarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < 4$. נוכל להציב זאת חזרה באגף השמאלי של הביטוי שקיבלנו לעיל ונראה ש־

$$\left|\frac{1}{x+1} - 2\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|x+1|} \cdot \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < 2 \cdot 4 \cdot \delta = 8\delta \,. \tag{8}$$

נבחר $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{8}, \frac{1}{4}\right\}$ ונציב חזרה באי־שוויון (8),

$$\left|\frac{1}{x+1} - 2\right| < 2\delta \leq \epsilon \,.$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$ ונקבע $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{8}, \frac{1}{4}\right\}$. נסתכל על כל ערכי ה־$x$ המקיימים $0 < \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \delta$. נשים לב כי

$$\begin{array}{rcl} 0 < & \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| & < \delta \\ -\frac{1}{2} - \delta < & x & < -\frac{1}{2} + \delta \\ \frac{1}{2} - \delta < & x+1 & < \frac{1}{2} + \delta \end{array}$$

ולכן $\frac{1}{4} < x+1 < \frac{3}{4} \Leftarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < 4$. על כן,

$$\left|\frac{1}{x+1}-2\right| = \left|\frac{-2x-1}{x+1}\right| = 2\cdot\frac{1}{|x+1|}\cdot\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < 2\cdot 4\cdot\delta \le \epsilon,$$

כנדרש. ■

נפתור תרגיל נוסף מאותו הסוג.

תרגיל 2.28 השתמשו בהגדרת הגבול בכדי להוכיח כי

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$ ונבחר $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{10}\right\}$. נסתכל על כל ערכי ה־$x$ המקיימים $0 < |x-2| < \delta$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{3}\right| &= \frac{2}{3}\cdot\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \\ &= \frac{2}{3}\cdot\left|\frac{1}{x+1}\right|\cdot|x-2| \\ &< \frac{2}{3}\cdot\left|\frac{1}{x+1}\right|\cdot\delta\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}-\delta < {} & x-2 & < \delta \\ 2 < 3-\delta < {} & x+1 & < 3+\delta < 4\end{aligned}$$

ולכן

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| < \frac{1}{2}.$$

נציב חזרה באי־שוויון הראשון ונקבל

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}\cdot\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \le \frac{2}{3}\cdot\delta\cdot\frac{1}{2} \le \epsilon.$$

■

עד כה התרכזנו באופן בו ניתן להוכיח גבול מסויים. כעת אנחנו נעבור דווקא להוכיח את הדבר ההפוך והוא שלא קיים כל גבול בנקודה מסויימת. כיצד ניתן לבצע זאת? בכדי להוכיח שלא קיים גבול אזי צריך למעשה להוכיח באופן מלא ששום ערך L לא יכול להיות הגבול של הפונקציה בנקודה. דרך נוחה לבצע זאת היא על ידי שימוש בהגדרה דווקא בכדי להפריך. לוקחים את ההגדרה ועל ידי שינוי כמתים מגיעים לתנאים הנדרשים בכדי להוכיח שלא קיים גבול. נזכור שההגדרה אומרת שלכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x)-L| < \epsilon$. המשפט הבא הוא השלילה של ההגדרה.

משפט 2.29 אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x המקיים ש־ $|x-a| < \delta$ וגם $|f(x) - L| \geq \epsilon$ אזי לפונקציה אין גבול L בנקודה.

במילים פשוטות, המשפט אומר שמספיק למצוא ϵ יחיד כך שבכל סביבה δ של a יש נקודה שהערך בפונקציה בה רחוק מ־L ביותר מ־ϵ.

טענה 2.30 לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}.$$

אין גבול בנקודה $x = 1$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים גבול בנקודה $a = 1$ ולכן לכל $\epsilon > 0$ קיימת סביבה מספיק קרובה ל־1 כך שהפונקציה קרובה ל־L. נניח ש־ $\epsilon = \frac{1}{10}$ ונסמן את הסביבה שמקיימת את הגדרת הגבול ב־$(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$. מאחר והסביבה כוללת ערכים מימין ומשמאל ל־1, אזי ישנן נקודות, $x_1, x_2 \in (1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$, $x_1 < 1 < x_2$ כך ש־

$$f(x_1) = 2 \ , \ f(x_2) = 5 \tag{9}$$

ובנוסף,

$$|f(x_1) - L| < \epsilon, \ |f(x_2) - L| < \epsilon, . \tag{10}$$

נוכל לשלב כעת בין משוואה (9) ואי־שוויון (10) ונקבל

$$\begin{aligned} |2 - L| &< \epsilon = \frac{1}{10} \\ |5 - L| &< \epsilon = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

נפתח את הערכים המוחלטים ונראה ש־

$$\begin{aligned} -0.1 < \quad & L - 2 & < 0.1 \\ -0.1 < \quad & 5 - L & < 0.1 \end{aligned}$$

וחיבור של האי־שוויונים נותן לנו את התוצאה $-0.2 < 3 < 0.2$, סתירה. לכן לא קיים L כפי שנטען מלכתחילה. ■

2.4.3 אריתמטיקה של גבולות

בכדי לא לחזור שוב ושוב על אותן הדרכים וההוכחות המפרכות שראינו עד כה, ישנן מספר טענות ותכונות שמסייעות לנו מאוד במציאת גבולות.

יהיו שתי פונקציות f, g המוגדרות בסביבה של הנקודה $a \in R$. נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ ו־$\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, קרי הגבולות של f ו־g בנקודה a קיימים והם שווים ל־L_1, L_2 בהתאמה. אזי:

1. הגבול של הסכום שלהן / החיסור בינהן, $\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)$, קיים והוא שווה ל- $L_1 \pm L_2$.
2. הגבול של המכפלה שלהן, $\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)$, קיים והוא שווה ל-$L_1 \cdot L_2$.
3. אם $L_2 \neq 0$, ז"א ש- $g\left(x\right) \neq 0$ בסביבה של a, אזי הגבול של המנה שלהן, $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$, קיים והוא שווה ל- $\frac{L_1}{L_2}$.

תרגיל 2.31 השתמשו בכללי אריתמטיקה של גבולות בכדי לחשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}$.
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2-1}$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$.

פתרון: נוכל כעת לראות כי התוצאות נשמרות בהתאם למה שפתרנו בשאלות קודמות.

1. נשתמש בתכונות האריתמטיקה מספר פעמים:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1} &= \frac{\lim_{x\to 2}\left(x-1\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x+1\right)}\\ &= \frac{\left[\lim_{x\to 2}\left(x\right)\right]-1}{\left[\lim_{x\to 2}\left(x\right)\right]+1}\\ &= \frac{2-1}{2+1}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. נחשב ישירות כמו בסעיף הקודם:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2-1} &= \frac{\lim_{x\to 2}\left(x-1\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}\\ &= \frac{\left[\lim_{x\to 2}\left(x\right)\right]-1}{\left[\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)\right]-1}\\ &= \frac{2-1}{4-1}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

3. נשים לב כי הפעם אין באפשרותנו לבצע את החישוב ישירות מאחר והמכנה מתאפס באזור הנקודה אליה שואפים ולכן נצטרך לבצע מעט מניפולציות אלגבריות בכדי

לפתור את הבעיה.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}\\ &= =\frac{1}{\lim_{x\to 1}(x+1)}\\ &= \frac{1}{[\lim_{x\to 1}(x)]+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

הטענה הבאה, במקרים מסויימים, יכולה לסייע לנו מאוד בחישוב גבולות.

טענה 2.32 תהי נקודה $a\in\mathbb{R}$ ופונקציה ממשית f. אם $f(x)\geq 0$ בסביבה של הנקודה a והגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אזי

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}\,.$$

תרגיל 2.33 חשבו את הגבול של הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{4x-4}-x}{x^2-4}$ בנקודה $x=2$.

פתרון: נשים לב תחילה שבנקודה $x=2$ אנחנו מקבלים מכנה שווה ל־0 ולכן נצטרך למצוא דרך אלגברית להימנע ממצב זה.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x-4}-x}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x-4}-x}{(x+2)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x-4}-x}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{4x-4}+x}{\sqrt{4x-4}+x}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{4x-4-x^2}{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{4x-4}+x\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)^2}{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{4x-4}+x\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x+2)\left(\sqrt{4x-4}+x\right)}\\ &= \frac{2-\lim_{x\to 2}x}{\lim_{x\to 2}(x+2)\left(\lim_{x\to 2}\sqrt{4x-4}+\lim_{x\to 2}x\right)}\\ &= \frac{2-2}{4\cdot\left(\sqrt{4\lim_{x\to 2}(x)-4}+2\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

שימו לב כי בשלב האחרון השתמשנו בטענה 2.32, למרות שהיא לא הכרחית מאחר והמונה שווה ל־0 במקרה זה ולכן כל הגבול מתאפס.

2.5 חסימות של פונקציה

פונקציות יכולות להיות חסומות בקטעים סופיים ואינסופיים כאחד. רוב הפונקציות שפגשנו עד כה לא היו חסומות בהסתכלות על כל הציר הממשי אבל אין זה אומר שהן לא חסומות בקטע סופי.

הגדרה 2.34 הפונקציה הממשית f חסומה בתחום D אם קיים $M>0$ כך שלכל $x\in D$, $|f(x)|<M$ (או לחילופין $-M<f(x)<M$).

כיצד שוללים את הגדרת החסימות? באותו האופן בו ראינו כיצד הופכים את הגדרת הגבול. נזכיר שלוקחים את הכמתים "קיים" ו־"לכל" ובכל מקום בו רשום אחד אז רושמים את השני וכן לבסוף הופכים את כיוון האי־שוויון בהגדרה.

משפט 2.35 הפונקציה הממשית f איננה חסומה בתחום D אם לכל $M>0$ קיים $x\in D$, כך ש־ $|f(x)|\geq M$.

תרגיל 2.36 עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות, קבעו האם הפונקציות חסומות בתחום הגדרתן הטבעי או לא (הוכיחו את טענותיכם):

1. $f(x)=\frac{1}{1+x}$.
2. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

פתרון: נפתור כל סעיף בנפרד ונצרף הוכחה בהתאם.

1. אנחנו יכולים לראות כי ככל הנראה קיימת בעיה בנקודה $x=-1$ ולכן נסתכל על הקטע $D=(-1,0)$. אנחנו נרצה להראות שהיא איננה חסומה ולכן נשתמש במשפט 2.35 לשם ההוכחה. יהי $M>0$ ונסתכל על $x\in D$ כך ש־ $0<|x-(-1)|<c$ (הערה ־ אנחנו נבחר את הערך c שמתאים לנו לאחר מכן, בדיוק כשם שעשינו בהגדרת הגבול). נשים לב ש־$|x-(-1)|=|x+1|<c$ ונקבל

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\frac{1}{1+x}\right|> \\ &> \frac{1}{c}\end{aligned}$$

(כעת כל מה שנותר לנו הוא לבחור את c כך שנקבל בדיוק את מה שנדרש לפי המשפט). נבחר $c=\frac{1}{M+1}$ ונקבל

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{1+x}\right|>\frac{1}{c}=M+1$$

עבור כל $0<|x-(-1)|<\frac{1}{M+1}$ כנדרש.

2. עבור הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^{2}}$ דווקא לא תהיה בעיית חסימות מאחר והמכנה תמיד יהיה גדול או שווה ל־1. נצטרך להוכיח כי הפונקציה חסומה ולשם כך נשתמש בהגדרה 2.34. מאחר ו־$x^{2}\geq0$ בכל הישר הממשי, נובע שהמכנה של $f\left(x\right)$ תמיד גדול או שווה ל־1. נבחר $M=2$ ונראה כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $\left|f\left(x\right)\right|<M$.

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{1+x^{2}}\right|=\frac{1}{1+x^{2}}\leq1<2=M,$$

ולכן הפונקציה מקיימת את הגדרת החסימות ובפרט חסומה.

תרגיל 2.37 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. יהיו צמד פונקציות חסומות $f,g:D\to\mathbb{R}$. אזי גם $f+g$ ו־ $f\cdot g$ הן פונקציות חסומות.

2. אם הפונקציה f חסומה אזי גם $\frac{1}{f}$ חסומה.

פתרון: נפתור כל סעיף בנפרד.

1. אכן הטענה נכונה ואם ישנן צמד פונקציות חסומות f,g אזי גם הסכום וגם המכפלה שלהן חסומה. נשים לב שהן מוגדרות באותו התחום ולכן גם הסכום והמכפלה שלהן מוגדר באותו התחום. מאחר וגם f וגם g חסומות נובע שקיימים מספרים חיוביים M_1,M_2 כך שלכל $x\in D$ מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|<M_1$ ו־ $\left|g\left(x\right)\right|<M_2$. נוכיח כי גם $f+g$ חסומה. עבור כל $x\in D$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\left(f+g\right)\left(x\right)\right| &= \left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|\leq\\ &\leq \left|f\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|<\\ &< M_1+M_2\end{aligned}$$

ולכן הפונקציה $f+g$ גם חסומה על פי הגדרה. בנוסף נשים לב שלכל $x\in D$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\left(f\cdot g\right)\left(x\right)\right| &= \left|f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right|=\\ &= \left|f\left(x\right)\right|\cdot\left|g\left(x\right)\right|<\\ &< M_1\cdot M_2\end{aligned}$$

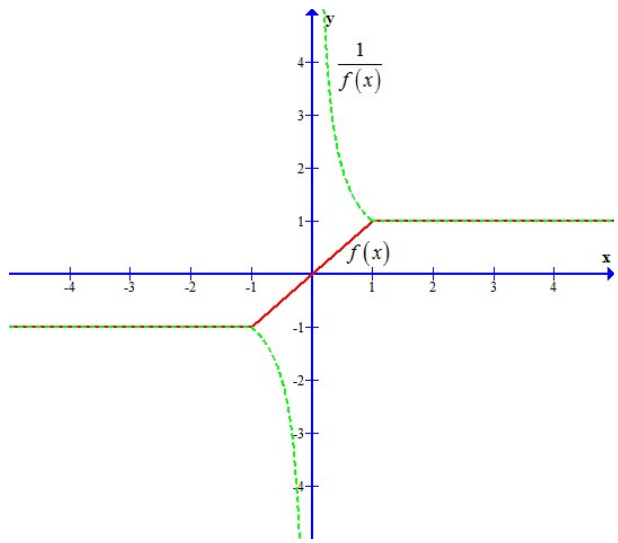
וגם הפונקציה $f\cdot g$ היא פונקציה חסומה לפי הגדרה.

2. הטענה הזאת איננה נכונה ונראה דוגמא נגדית. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x & -1\leq x\leq1\\ -1 & x<-1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

קל לראות שהפונקציה $|f(x)| \leq 1$ עבור כל $x \in \mathbb{R}$ ולכן הפונקציה היא פונקציה חסומה לפי הגדרה. נסתכל כעת על $\frac{1}{f}$.

$$\frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & -1 \leq x \leq 1,\ x \neq 0 \\ -1 & x < -1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



איור 3: גרף של הפונקציה מתרגיל 2.37

זו פונקציה שאיננה חסומה בקטע $(0,1)$ ואנו נוכיח זאת. יהי $M > 0$. נבחר $x \in (0,1)$ כך ש־ $|x| < \frac{1}{M+1}$ ונשים לב ש־ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} > M+1$ ולכן הפונקציה איננה חסומה בסתירה לטענה.

תרגיל 2.38 תהי פונקציה ממשית f שמוגדרת על כל הציר הממשי. יהי $c \in \mathbb{R}$ ונגדיר $g_c(x) = f(x) - f(x-c)$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $f(x)$ חסומה אזי גם $g_c(x)$ חסומה.
2. אם $g_c(x) = 0$ לכל x, c אזי $f(x)$ קבועה.

פתרון: נתייחס לכל סעיף בנפרד.

1. הטענה הנ"ל איננה נכונה ונראה זאת בעזרת דוגמא נגדית. אם $f(x) = x$ אזי אנחנו יודעים שהיא איננה חסומה. אבל לכל $c, x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$g_c(x) = f(x) - f(x-c) = x - (x-c) = c$$

וקיבלנו שהפונקציה $g_c(x)$ חסומה.

2. נוכיח שהטענה הנ"ל נכונה. יהי $x \in \mathbb{R}$. אנחנו צריכים להוכיח ש־ $f(x) = constant$.

$$\begin{aligned} g_c(x) &= 0 \\ f(x) - f(x-c) &= 0 \\ f(x) &= f(x-c) \end{aligned}$$

מאחר וכל השלבים נכונים עבור כל c (לפי הנתון), נבחר $c = x$ ונקבל

$$f(x) = f(x-c) = f(0).$$

קיבלנו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים ש־$f(x) = f(0)$ ולכן הפונקציה f היא פונקציה קבועה.

תרגיל 2.39 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ עבור L מספר סופי כלשהו, אזי קיים $N > 0$ כך ש־ f חסומה בתחום (N, ∞).
2. אם לכל $N > 0$ מתקיים ש־ f חסומה בתחום (N, ∞) אזי הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים.
3. אם $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ אזי $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.
4. אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $f(x)$ חסומה בקטע (n, ∞) וכן $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, אזי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

פתרון: נתייחס לכל סעיף בפני עצמו.

1. הטענה נכונה ונוכיח אותה. אם נתון שהגבול קיים אזי נבחר $\epsilon = 1$ ולכן קיים $N > 0$ כך שלכל $x > N$ מתקיים ש־ $|f(x) - L| < 1$. מכאן נובע שלכל $x \in (N, \infty)$ מתקיים $L - 1 < f(x) < L + 1$ ולכן

$$|f(x)| < \max\{|L-1|, |L+1|\}$$

ובפרט הפונקציה חסומה בתחום זה.

2. הטענה איננה נכונה וניתן להראות זאת על ידי דוגמא נגדית. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

הפונקציה מקבלת את הערך 1 עבור כל x שלם ואחרת היא שווה לאפס. משמע הפונקציה חסומה על ידי $M = 2$ בכל הציר הממשי ויחד עם זאת אין לה גבול מאחר ואין ערך אליו היא תמיד קרובה עד כדי אפסילון לכל x מנקודה כלשהי והלאה.

3. הטענה איננה נכונה ונוכל לבנות בקלות דוגמא נגדית. נרצה לקבוע לדוגמא כי $f(x)-g(x)=7$ ולכן נגדיר $g(x)=x$ ו־$f(x)=x+7$. כעת נשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\infty}(x+7-x)=\lim_{x\to\infty}(7)=7$$

בסתירה לטענה.

4. יהי $\epsilon>0$. נתחיל מהנתון עבור f. קיים $M>0$ כך ש־ $|f(x)|<M$ לכל $x\in(n_1,\infty)$. בנוסף, מאחר ו־$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ נובע שלכל $K=\frac{M}{\epsilon}>0$ קיים $n_2>0$ כך שלכל $x>n_2$ מתקיים $g(x)>K=\frac{M}{\epsilon}$. נסתכל על כל ה־$x$ כך ש־ $x>\max\{n_1,n_2\}$.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\frac{M}{|g(x)|}<\epsilon$$

כנדרש.

תרגיל 2.40 חשבו את הגבולות הבאים:

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x}{2x^3+5}=?$.
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-2}=?$.
- $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^3-2x}}{\sqrt{x^3+1}}=?$.
- $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)=?$.

פתרון: נפתור כל סעיף בנפרד.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x}{2x^3+5} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+2\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(2+5\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+2\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2+5\frac{1}{x^3}\right)}=\\ &= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+2\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+5\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1+\lim_{x\to\infty}\left(2\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to\infty}\left(3\frac{1}{x^2}\right)}{2+\lim_{x\to\infty}\left(5\frac{1}{x^3}\right)}=\\ &= \frac{1+0+0}{2+0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+2\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1-2\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{\left(1+2\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1-2\frac{1}{x}\right)}\\ &= -\frac{\sqrt{\left(1+2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1-2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)}=-1.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^3-2x}}{\sqrt{x^3}+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^3\left(1-2\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(1-2\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)}$$

$$= \;=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(1-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)}=\sqrt{2}$$

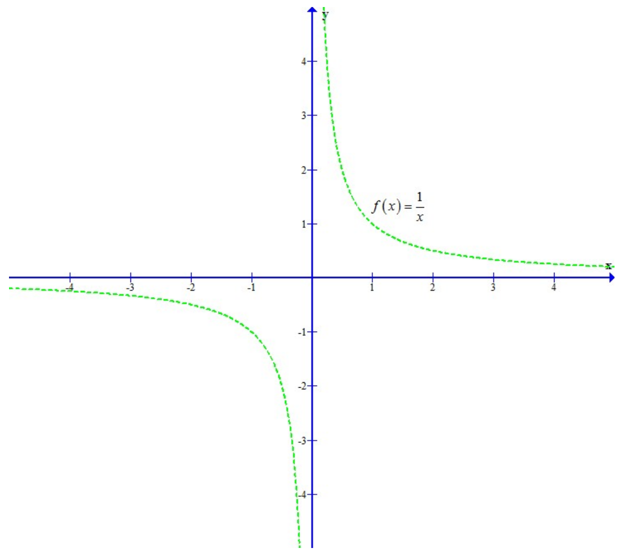
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}=\\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}=\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.6 גבולות אינסופיים - הגבול במובן הרחב

עד כה, כאשר דנו בגבולות של פונקציות, בכל הפעמים הפונקציות היו חסומות והגבולות נלקחו כאשר x שואף לנקודה ספציפית סופית או לאינסוף. אך, לעומת זאת, ניתן להכליל את מושג הגבול בכדי שיכיל גם אלמנטים אינסופיים. אנחנו נתייחס למצבים אינסופיים בגבולות בשני אופנים - הפן הראשון, אשר כבר דנו בו, הוא הגבול של פונקציה באינסוף, קרי הערך $f(x)$ כאשר $x\to\pm\infty$. כעת נעסוק במצב בו הפונקציה עצמה שואפת לערך אינסופי, לדוגמא: $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$. המצב השני, אותו אנו מכירים מהעבר (תיכון, מכינה וכו'), הוא המצב בו הפונקציות מתבדרות, שואפות לאינסוף. ראינו מספר דוגמאות בהן ישנן פונקציות לא חסומות כאשר בפועל הפונקציות הללו שואפות לאינסוף (או לחילופין ל- $-\infty$). נתחיל במספר הגדרות בסיסיות להבנת גבולות אינסופיים.

נתחיל עם הגדרות הנוגעות לשאיפה לאינסוף בנקודה ספציפית, כאשר הגבול נלקח בסביבה כלשהי של הנקודה $a\in\mathbb{R}$.

הגדרה 2.41 תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ונקודה $a\in\mathbb{R}$.



איור 4: הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ וגבולות חד־צדדיים ב־0

- אם לכל $N>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-a\right|<\delta$ מתקיים $f\left(x\right)>N$, אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=+\infty$.
- אם לכל $N<0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\left|x-a\right|<\delta$ מתקיים $f\left(x\right)<N$, אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=-\infty$.

בנוסף למקרים שראינו עד כה, בהם הסתכלנו על גבולות שנלקחים בנקודה מסויימת ישנו גם המושג של "גבולות חד־צדדיים". אם נחשוב לרגע על הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ אז נשים לב שכאשר אנחנו מתקרבים ל־0 מהכיוון החיובי של הציר הממשי, הפונקציה שואפת לאינסוף. לעומת זאת, כאשר נתקרב ל־0 מהכיוון השלילי של ציר המספרים, הפונקציה תלך ותקטן ותשאף ל־$-\infty$. עבור מצבים כאלה מגדירים גבולות חד־צדדיים בהם לא נסתכל על סביבה של a (קטע המכיל את a משני צידיו) אלא דווקא על קטע פתוח שקצהו בנקודה a.

הגדרה 2.42 תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ונקודה $a\in\mathbb{R}$.

- אם לכל $N>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $a<x<a+\delta$ מתקיים $f\left(x\right)>N$, אזי $\lim_{x\to a+}f\left(x\right)=+\infty$. מצבים כאלה נקראים "גבול מימין של הפונקציה" מאחר ואנחנו מסתכלים כל ערכי ה־x שגדולים מ־a ולא על ערכים שקטנים ממנו.
- אם לכל $N<0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $a<x<a+\delta$ מתקיים $f\left(x\right)<N$, אזי $\lim_{x\to a+}f\left(x\right)=-\infty$.

הגדרה 2.43 תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ונקודה $a\in\mathbb{R}$.

- אם לכל $N>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $a-\delta<x<a$ מתקיים $f(x)>N$, אזי $\lim_{x\to a-}f(x)=+\infty$. באופן סימטרי להגדרה הקודמת, לגבול במצב זה קוראים "הגבול משמאל של הפונקציה" מאחר ואנו מנתחים את הגבול של הפונקציה כאשר היא שואפת לנקודה מצד שמאל, כל ערכי ה־x הם קטנים מ־a.
- אם לכל $N<0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $a-\delta<x<a$ מתקיים $f(x)<N$, אזי $\lim_{x\to a-}f(x)=-\infty$.

תרגיל 2.44 הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=\infty$.

הוכחה: יהי $N>0$. נקבע $\delta>0$ = ... ונסתכל על כל ה־x כך ש־$0<x<\delta$.

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\frac{1}{x^3}\right|=\frac{1}{x^3}>\\ &> \frac{1}{\delta^3}\end{aligned}$$

אם $\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ אזי $|f(x)|>\frac{1}{\delta^3}=N$ כנדרש. (כעת כל שנותר זה לחזור אחורה לרשום את הבחירה של δ מלכתחילה). ■

תרגיל 2.45 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. תהי פונקציה ממשית f . אם $\lim_{x\to a^+}f(x)=0$ אזי $\lim_{x\to a^+}\frac{1}{f(x)}=\infty$.
2. תהי פונקציה ממשית f . אם $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$ אזי $\lim_{x\to a^+}\frac{1}{f(x)}=0$.

הוכחה: נתחיל מהחלק הבעייתי וזה לקבוע מה נכון ומה לא נכון. נוכל לחשוב על דוגמאות רבעות עבור הסעיף הראשון אבל, בגדול, הוא איננו נכון ונראה זאת בעזרת דוגמא נגדית.

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

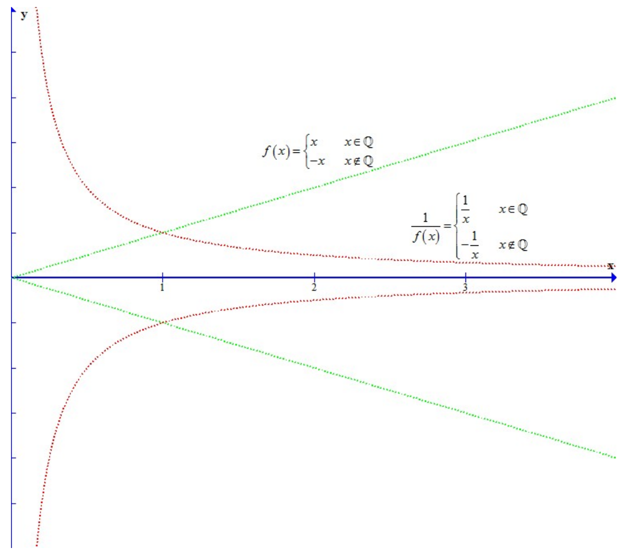
נשים לב כי אכן הפונקציה שואפת לאפס באופן כללי בנקודה $a=0$. קל להוכיח זאת. יהי $\epsilon>0$ ונקבע $\delta=\epsilon$. נסתכל על כל ה־x כך ש־ $0<x<\delta$ ונשים לב כי

$$|f(x)-L|=|x-0|=|x|<\delta=\epsilon$$

כנדרש. לעומת זאת,

$$\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in\mathbb{Q}\\ -\frac{1}{x} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

איננה שואפת לאינסוף מאחר ותמיד תהיה נקודה אי־רציונאלית כך שהפונקציה תהיה קטנה מ־0. ראו איור 5 בעמוד 38.



איור 5: פונקציה כך ש־$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ אבל הגבול של $\frac{1}{f(x)}$ לא קיים.

כעת נצטרך להתייחס לסעיף השני ומסתבר שהוא אכן נכון. צריך להוכיח כי $\lim_{x\to a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$. יהי $\epsilon > 0$. מאחר ונתון ש־ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ אזי לפי הגדרה קיים $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon}$ לכל $a < x < a + \delta$.

לכן נובע ש־ $\frac{1}{|f(x)|} < \epsilon$ לכל $a < x < a + \delta$, ומאחר ו־ ϵ הוא מספר חיובי שרירותי כלשהו, ניתן להסיק ש־ $\lim_{x\to a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$, לפי הגדרה. ■

2.6.1 גבול אינסופי כאשר $x \to \infty$

מקרה נוסף שנצטרך לדון בו הוא המקרה בו הפונקציה איננה חסומה ולכן הולכת וגדלה (או קטנה) ככל ש־x הולך וגדל. נתחיל עם ההגדרה למקרה הזה ולאחר מכן נפתור תרגילים יחסית אינטואיטיביים תוך שימוש בהגדרה.

הגדרה 2.46 אם לכל $N > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים ש־ $f(x) > N$, אזי נאמר שהפונקציה הולכת לאינסוף ונסמן זאת על ידי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

תרגיל 2.47 הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} 3x - 5 = \infty$.

הוכחה: נוכיח בדיוק באותו האופן בו הוכחנו גבולות עד כה תוך שימוש בהגדרה 2.46. יהי $K > 0$. נבחר $M = \ldots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $x > M$.

$$3x - 5 > 3M - 5$$

אם $M=\frac{k+5}{3}$ נקבל ש־ $K=3\left(\frac{k+5}{3}\right)-5>3x-5$ כנדרש לפי ההגדרה ולכן $\lim_{x\to\infty}3x-5=\infty$. (כל שנותר כעת זה לחזור אחורה ולהציב את הערך עבור M). ■

טענה 2.48 יהי $a<b$. נניח שבכל קטע (M,∞) קיימים x_1,x_2 כך ש־ $f(x_1)<a,\ f(x_2)>b$, הוכיחו כי לא קיים גבול כלל כאשר $x\to\infty$.

הוכחה: נוכיח כי הגבול לא יכול להיות סופי ובהתאם שהוא אינו יכול להיות אינסופי. נניח בשלילה כי קיים גבול סופי $\lim_{x\to\infty}f=L$. יהי $0<\epsilon=\ldots$. קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\epsilon$. את האי־שוויון האחרון נוכל לרשום באופן הבא - $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$ לכל $x>M$. ניקח $x_1,x_2\in(M,\infty)$ כך ש־ $f(x_1)<a,\ f(x_2)>b$.צ

$$\begin{aligned} L-\epsilon< \quad & f(x_1) \quad <a \\ b< \quad & f(x_2) \quad <L+\epsilon \end{aligned}$$

כעת נשלב את האי־שוויונים ונקבל,

$$\begin{aligned} & L \quad <a+\epsilon \\ b-\epsilon< \quad & L \\ b-\epsilon< \quad & L \quad <a+\epsilon \end{aligned}$$

על כן קיבלנו ש־ $a+b<2\epsilon$. אבל $\epsilon>0$ הוא שרירותי ולכן נוכל לבחור $\epsilon=\frac{a+b}{4}$ ונקבל $a+b<2\cdot\frac{a+b}{4}=\frac{a+b}{2}\ \Leftarrow\ 1<\frac{1}{2}$. סתירה.

נניח בשלילה ש־ $\lim_{x\to\infty}f=\infty$. אזי לכל $K>b$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $f(x)>K$. נבחר $x_1\in(M,\infty)$ כך ש־ $f(x_1)<a$. לכן נובע ש־ $b<K<f(x_1)<a$ בסתירה לנתון. ההוכחה עבור $\lim_{x\to\infty}f=-\infty$ זהה. ■

2.6.2 סיכום הוכחות גבולות וחסימות

נסקור בקצרה את האופנים בהם ניתן להוכיח שקיים או לא קיים גבול ושהפונקציה חסומה או לא חסומה. ישנן מספר תבניות שחוזרות על עצמן ואנחנו נציג סיכום של האופן בו בונים את ההוכחות וההפרכות למקרים השונים. שימו לב שהתבניות הללו מבוססות אך ורק על ההגדרות השונות ושתמיד ניתן למצוא דרכים נוספות להוכיח.

<u>**חסימות של פונקציה**</u>

- **אם רוצים להוכיח שפונקציה** $f : D \to \mathbb{R}$ **היא חסומה** (שימו לב שההגדרה לחסומה אומר שהיא חסומה בכל תחום ההגדרה שלה) צריך להראות שלכל $x \in D$ מתקיים $|f(x)| < M$ עבור $M > 0$ כלשהו. זאת אומרת שצריך למצוא $M > 0$ כך שלכל $x \in D$, $|f(x)| < M$. "נבחר $M > 0 = ...$ ונראה ש־ $|f(x)| < M$ לכל $x \in D$" (בוחרים את ה־M בסוף בכדי שהאי־שוויון האחרון יתקיים).
- **אם רוצים להוכיח שפונקציה** $f : D \to \mathbb{R}$ **היא חסומה בקטע כלשהו** $[a,b]$ צריך להראות שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $|f(x)| < M$ עבור $M > 0$ כלשהו. זאת אומרת שצריך למצוא $M > 0$ כך שלכל $x \in [a,b]$, $|f(x)| < M$.
- **אם רוצים להוכיח שפונקציה** $f : D \to \mathbb{R}$ **היא לא חסומה** אז צריך להראות שלכל $M > 0$ יש $x \in D$ כך ש־ $|f(x)| > M$. זאת אומרת שההוכחה תתחיל ב־"יהי $M > 0$" ולאחר מכן צריך לבחור / להראות שקיים $x \in D$ כך ש־ $|f(x)| > M$.

<u>**קיום של גבול**</u>

ישנם המון סוגים של גבולות ־ חד־צדדיים, סופיים, אינסופיים וכן הלאה ולכן דבר ראשון צריך להכיר את כל ההגדרות לכל המקרים. נתאר פה את המצב הכללי ובהתאם להגדרה הרלוונטית תצטרכו להציב את הפרמטרים השונים.

- **רוצים להוכיח כי קיים הגבול הבא** $\lim_{x\to\square} f(x) = \triangle$. נפצל למקרים:
  - **אם** $\square = a$ **מספר ממשי כלשהו ו־** $\triangle = L$ **מספר ממשי אחר**, אז ההוכחה תתחיל ב־"יהי $\epsilon > 0$, נבחר $\delta > 0 = \cdots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $0 < |x-a| < \delta$". כעת צריך להראות באופן שעשינו מספר פעמים ש־ $|f(x) - L| < \epsilon$. שימו לב שבסוף בוחרים את δ (בהתאם למה שיגרום לאי שיוויון האחרון להתקיים) וחוזרים לתחילת ההוכחה ומציבים אותו.
  - **אם** $\square = a$ **מספר ממשי כלשהו ו־** $\triangle = \infty$ **מספר ממשי אחר**, אז ההוכחה תתחיל ב־"יהי $K > 0$, נבחר $\delta > 0 = \cdots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $0 < |x-a| < \delta$". כעת צריך להראות ש־ $f(x) > K$. בסוף בוחרים את δ וחוזרים לתחילת ההוכחה ומציבים אותו.
  - **אם** $\square = a$ **מספר ממשי כלשהו ו־** $\triangle = -\infty$ **מספר ממשי אחר**, אז ההוכחה תתחיל ב־"יהי $K < 0$, נבחר $\delta > 0 = \cdots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $0 < |x-a| < \delta$". כעת צריך להראות ש־ $f(x) < K$ וממשיכים כמו בסעיף הקודם.
  - **אם** $\square = \infty$ **ו־** $\triangle = L$ **מספר ממשי**, אז ההוכחה תתחיל ב־"יהי $\epsilon > 0$, נבחר $M > 0 = \cdots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $x > M$". כעת צריך להראות ש־ $|f(x) - L| < \epsilon$. בסוף, לאחר כל החישובים והמעברים, בוחרים את M וחוזרים לתחילת ההוכחה ומציבים אותו.

- **אם $\square = \infty$ ו־ $\triangle = \infty$ מספר ממשי**, אז ההוכחה תתחיל ב־"יהי $K > 0$, נבחר $M > 0 = \cdots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $x < M$". כעת צריך להראות ש־ $f(x) > K$. בסוף, לאחר כל החישובים והמעברים, בוחרים את M וחוזרים לתחילת ההוכחה ומציבים אותו.
- **אם $\square = \infty$ ו־ $\triangle = -\infty$ מספר ממשי**, אז ההוכחה תתחיל ב־"יהי $K < 0$, נבחר $M > 0 = \cdots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $x < M$". כעת צריך להראות ש־ $f(x) < K$ וממשיכים כמו בסעיף הקודם.

- **<u>כללים מנחים להוכחת גבולות חד־צדדיים:</u>** במידה ומדובר בגבול חד־צדדי, אז בכל הרשום לעיל צריך לבצע את ההתאמות הבאות.
  - אם $x \to a$ אז מסתכלים על כל ה־x כך ש־ $0 < |x-a| < \delta$.
  - אם $x \to a^{+}$ אז מסתכלים על כל ה־x כך ש־ $a < x < a + \delta$.
  - אם $x \to a^{-}$ אז מסתכלים על כל ה־x כך ש־ $a - \delta < x < a$.
  - אם $\square = \infty$ אז בוחרים $M > 0 = \cdots$ ומסתכלים על כל ה־x כך ש־ $x < M$.
  - אם $\square = -\infty$ אז בוחרים $M < 0 = \cdots$ ומסתכלים על כל ה־x כך ש־ $M < x$.

- **דרכים להוכיח שלא קיים גבול** - יש 2 דרכים מרכזיות להוכיח שאין גבול או שהגבול לא קיים.
  - **<u>להראות שהגבולות החד־צדדיים שונים</u>**: מה שעושים זה להראות שהגבול מימין והגבול משמאל לא שווים זה לזה ולכן אין גבול בנקודה. כיצד מוכיחים כל גבול חד־צדדי? אם ניתן לעשות זאת בעזרת אריתמטיקה של גבולות וחישוב ישיר, מעולה. אחרת, צריך להוכיח כל גבול חד־צדדי בפני עצמו, וזה אומר לחזור ולראות בסעיפים הקודמים כיצד מוכיחים כל גבול, לפי הצורה שלו (סופי או אינסופי).
  - **<u>הוכחה בשלילה</u>**. מניחים שקיים גבול ולכן הגדרת הגבול מתקיימת. מה זה אומר בפועל? אופן בחירת הפרמטרים מתהפך. בוחרים מכל האפשרויות למעלה את המקרה שהנחנו בשלילה שהוא מתקיים. במקום "יהי..." נרשום "נבחר ..." ובמקום "נבחר..." נרשום "קיים...".
  - ניקח לדוגמא את המצב בו מניחים בשלילה ש־ $\lim_{x\to\square} f(x) = \triangle$ קיים ו־ $\square = a$, $\triangle = L$. ההוכחה תתחיל ב־"נניח בשלילה ש־ $\lim_{x\to\square} f(x) = \triangle$ קיים. נבחר $\epsilon > 0 = \cdots$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$". מהשלב הזה עושים מה שעשינו בתרגולים (פותחים ערכים מוחלטים, מחברים אי־שוויונים וכו') עד שמגיעים לסתירה (את ϵ בוחרים בסוף כך שאכן תהיה סתירה).
  - שימו לב שאנחנו לעולם לא נוכל לבחור גם את ϵ וגם את δ! אנחנו בוחרים בהוכחות רק פרמטר אחד ואילו השני נקבע לנו (זה לא משנה אם מדובר ב־ϵ, δ, ב־ M, K, ב־ δ, K או ב־ϵ, M, אנחנו לא בוחרים את שני הפרמטרים בהוכחה או הפרכה, בוחרים רק את האחד הרלוונטי והשני נקבע בהתאם להגדרה).

2.6.3 משפט הסנדביץ'

ישנו משפט שמסוגל לפשט לנו את חישובי והוכחת הגבולות בצורה משמעותית וזהו "משפט הסנדביץ'".

משפט 2.49 תהייה פונקציות f, g, h המוגדרות בסביבה מנוקבת של נקודה $a \in \mathbb{R}$. נניח כי

1. $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ לכל x.
2. $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$.

אזי $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

תרגיל 2.50 הוכיחו בעזרת משפט הסנדביץ' כי $\lim_{x \to 0} x + 2^{-x} x^4 = 0$.

פתרון: נבחן תחילה את הקטע $(-1, 1)$. נשים לב כי בסביבה זו של 0 מתקיים ש־ $x < x + 2^{-x} x^4 < (1 + 2)|x|$. האי־שוויון השמאלי נכון מאחר והפונקציה הנתונה מוסיפה אחר חיובי לאיבר הראשון שהוא x. האי־שוויון הימני נכון מאחר ו־$2^{-x} < 2$ ו־ $|x| < x^4$ לכל $x \in (-1, 1)$. על כן, ממשפט 2.49 נובע ש־

$$0 \leftarrow x < x + 2^{-x} x^4 < 3|x| \rightarrow 0$$

כאשר $x \to 0$ ועל כן $\lim_{x \to 0} x + 2^{-x} x^4 = 0$ כנדרש.

2.6.4 טבלאות תהליכים גבוליים - בכיוונים זהים ומנוגדים.

כשם שראינו כללי אריתמטיקה לגבולות סופיים, ישנם מספר מצבים מקרים בגבולות אינסופיים שחשוב להכיר. מקרים אלו יסייעו לנו מאוד בחישוב גבולות.

מקרה	התוצאה המתקבל בחישוב הגבול	למה שווה הגבול?
(1)	$\frac{c}{0^+},\ c > 0$	∞
(2)	$\frac{c}{0^+},\ c < 0$	$-\infty$
(3)	$c \cdot \infty,\ c > 0$	∞
(4)	$c \cdot \infty,\ c < 0$	$-\infty$
(5)	$\frac{c}{\infty}$	0
(6)	$\infty + \infty$	∞
(7)	$\infty \cdot \infty$	∞

הכללים הללו נוסעים בחלקם מהוכחות שעשינו בעבר.

ישנם מצבים נוספים בהם לא נוכל לקבוע את הגבול על בסיס התוצאה שקיבלנו ולכן נצטרך לבצע חישוב נוסף עד שנגיע לאחד המצבים המתוארים בטבלה הקודמת. המצבים הבעייתיים הם:

$$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"},\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"},\ \text{"}0 \cdot \infty\text{"},\ \text{"}\infty - \infty\text{"},\ 0^0,\ 1^\infty,\ \text{"}\infty^0\text{"}.$$

במקרים הללו נצטרך לעבוד קצת יותר קשה, בהתאם לתרגיל, בכדי להגיע לתשובה (כמובן יכול להיות מצב בו לא קיים הגבול כלל).

תרגיל 2.51 חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(x^{1+\alpha}-x\right)\ ,\ a>0$.
2. $\lim_{x\to\infty}\left(x^{1+\alpha}-x\right)\ ,\ -1<a<0$.
3. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sin\left(x\right)\right)$.
4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^{x}}{3^{x}+2^{x}}\right)$.
5. $\lim_{x\to0}\left(\frac{2^{x}}{3^{x}+2^{x}}\right)$.
6. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2^{x}}{3^{x}+2^{x}}\right)$.

תרגיל 2.52 נפתור כל סעיף בנפרד.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{1+\alpha}-x\right)\ \overset{"\infty-\infty"}{=}\ \lim_{x\to\infty}x\left(x^{\alpha}-1\right)\overset{"\infty\cdot\infty"}{=}\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{1+\alpha}-x\right)\ \overset{"\infty-\infty"}{=}\ \lim_{x\to\infty}x\left(x^{\alpha}-1\right)\overset{"\infty\cdot(-1)"}{=}-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sin\left(x\right)\right)\ =\ \lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{1}{x}\sin\left(x\right)\right)\overset{"\infty\cdot1"}{=}\infty$$

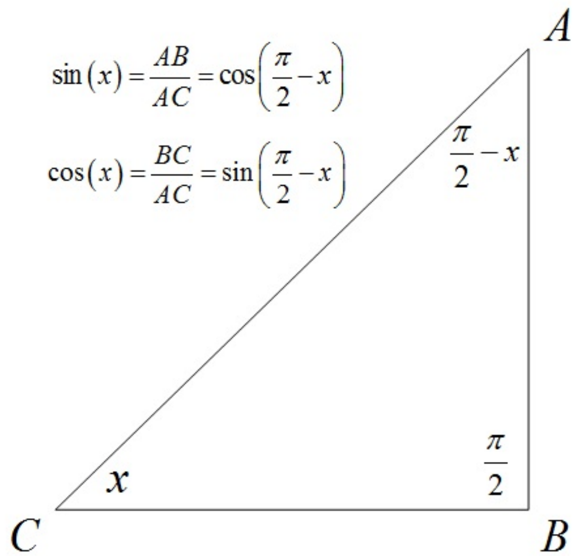
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^{x}}{3^{x}+2^{x}}\right)\ \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+1}\right)\overset{"\frac{1}{\infty}"}{=}0$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2^{x}}{3^{x}+2^{x}}\right)\ =\ \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2^{x}}{3^{x}+2^{x}}\right)\ \overset{"\frac{0}{0}"}{=}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+1}\right)=1$$

2.7 פונקציות טריגונומטריות

אתם בוודאי זוכרים בצורה כזו או אחרת את הפונקציות הטריגונומטריות מהתיכון. לשמחתנו, אין הרבה הבדל בין מה שאתה זוכרים מהתיכון למה שנראה באקדמיה. אבל לפני שנתחיל נצטרך לעשות רענון קטן לתכונות של פונקציות טריגונומטריות. ישנן 3 פונקציות נפוצות שנשתמש בהן לעיתים קרובות: $\sin(x)\,,\ \cos(x)\,,\ \tan(x)$. וההגדרה לכל אחת מהן מאוד קלה. מתחילים תמיד עם משולש ישר זווית.



איור 6: משולש ישר זווית וזוויות

כמו שניתן לראות, $\sin(x)$ הוא הערך שמתקבל מחלוקת הצלע (AB) שמול הזווית x ביתר של המשולש (AC). הקוסינוס מתקבל מתוך חלוקה של הצלע הזווית (BC) ביתר של המשולש ו-$\tan(x) = \frac{AB}{BC}$.

2.7.1 מעלות ורדיאנים

ניתן למדוד את הזוויות במספר דרכים. דרך אחת היותר מוכרת היא באמצעות מעלות, כאשר קובעים שבמעגל יש 360 מעלות, זאת יחידת מידה אחת. יחידת מידה אחרת היא רדיאנים, כאשר x רדיאנים זו הזווית המתאימה לקשת באורך x במעגל היחידה.

היקף מעגל הוא 2π ולכן $360^\circ = 2\pi\ rad$. נוכל כעת לרשום את אופן המרת היחידות ממצב אחד לאחר - $\frac{2\pi}{360}x^\circ = x\ rad \Leftrightarrow x^\circ = \frac{360}{2\pi}x\ rad$.

מעלות	רדיאנים
360	2π
180	π
270	$\frac{3\pi}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$
30	$\frac{\pi}{6}$

2.7.2 תכונות, ערכים וזהויות טריגונומטריות

נסקור בקצרה זהויות ותכונות שימושיות שראיתם בתיכון.

פונקציה	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\sin(x)$	0	-1	0	1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\tan(x)$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

לכל הפונקציות יש מחזוריות של 2π ולכן $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ וכנ"ל עבור קוסינוס וכו'.
בנוסף $|\cos(x)|\leq 1,\ |\sin(x)|\leq 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

זהויות ונוסחאות של פונקציות $\sin,\ \cos$	
$\sin(-x)=-\sin(x)$	$\cos(-x)=\cos(x)$
$\sin(\pi-x)=\sin(x)$	$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$	$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$
$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$	
$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(y)\pm\sin(y)\cos(x)$	$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(y)\sin(x)$	$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$
$\sin(x)\cos(x)\leq x\leq\tan(x)\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	$0\leq\sin(x)\leq x\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
$\sin(x)\pm\sin(y)=2\sin\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$	$\cos(x)\cos(y)=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$
$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x)\sin(y)=\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$
$\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin(x)\sin(y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

היחס בין שטח של גזרה לשטח של מעגל שווה ליחס בין הזוויות הכלואה בגזרה ל־2π - $\frac{S}{\pi}=\frac{x}{2\pi}$.

ראיתם בכיתה / בשיעור כי:

- $\lim_{x\to0}\sin(x)=0,\ \lim_{x\to0}\cos(x)=1$.
- $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

אלו גבולות חשובים ונשתמש בהם הרבה בעתיד לחישוב גבולות של פונקציות טריגונומטריות.

תרגיל 2.53 חשבו את הגבולות הבאים:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^3\right)}{x}=?$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=?$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}=?$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=?$

פתרון: נחשב כל מקרה בנפרד ואת החישוב האחרון נבצע בשני אופנים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^3\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}\cdot x^2 \overset{x^3=y}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}\cdot y^{\frac{2}{3}} = 1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} \overset{2x=y}{=} \lim_{\frac{y}{2}\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\cdot\frac{5x}{3x}\cdot\frac{3}{5} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5} = 1\cdot 1\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

דרך א':

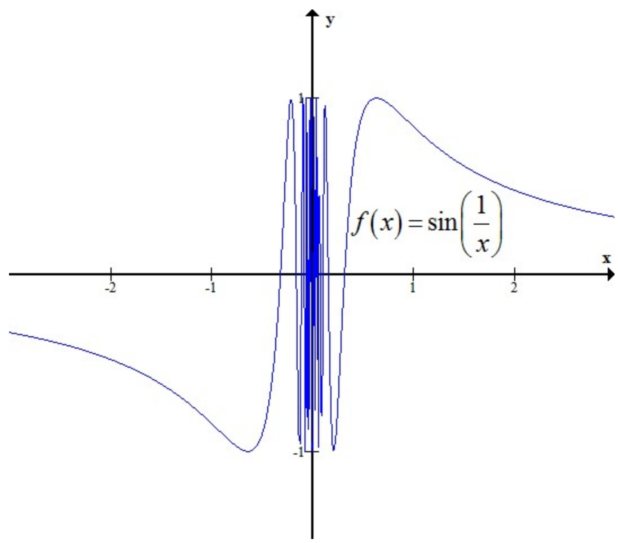
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos(x))} = \\ &= 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

דרך ב':

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \\ &= = \frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

טענה 2.54 הוכיחו כי $\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

ניתן לראות את הבעיתיות של הגבול ב־0 כבר מתוך השרטוט, ראו איור 7 בעמוד 47.



איור 7: פונקציית $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ בגבול כאשר $x\to 0$

אנחנו נוכיח את הטענה בשתי דרכים:

1. בצורה ישירה ללא טענת עזר.
2. בעזרת טענת עזר, הדומה מאוד לטענה שעשינו בתרגיל קודם (בתרגיל קודם הוכחנו טענה דומה כאשר $x\to\infty$ וכעת נוכיח עבור $x\to a^+$).

הוכחה: נניח בשלילה שהגבול קיים ונסמן אותו ב־L. על כן, נוכל לבחור $0<\epsilon=\ldots$ (בהמשך נחזור לשורה זו ונבחר $\epsilon=\frac{1}{2}$) וידוע כי קיים $0<\delta$ כך שלכל $0<x<\delta$ מתקיים

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)-L\right|<\epsilon\ .$$

נבחר שתי נקודות $0<x_2<x_1<\delta$ כך ש־

$$\frac{1}{x_1}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$
$$\frac{1}{x_2}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$$

עבור $k\in\mathbb{Z}$ כלשהו. נשים לב שעבור k מספיק גדול נקבל ש־

$$0<x_2=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}<x_1=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}<\delta$$

ולכן הבחירה הנ"ל אפשרית. נציב בפונקציה ונקבל,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1\\ \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=-1\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}L-\epsilon < \quad & \sin\left(\tfrac{1}{x_1}\right)=1 \quad < L+\epsilon\\ .L-\epsilon < \quad & \sin\left(\tfrac{1}{x_2}\right)=-1 \quad < L+\epsilon\end{aligned}$$

אם ניקח את האי־שיוויון הימני העליון והשמאלי התחתון ונשלב אותם, אזי נובע

$$\begin{aligned}1-\epsilon < \quad & L \quad < -1+\epsilon\\ 2 \quad < \quad & 2\epsilon\\ ,1 \quad < \quad & \epsilon\end{aligned}$$

ועם בחירת $\epsilon=\frac{1}{2}$ נקבל סתירה. ■

<u>טענת עזר</u>: יהיו $\beta > \alpha$ מספרים ופונקציה ממשית $f(x)$. נניח שעבור כל $\delta > 0$, קיימים $a < x_1, x_2 < a+\delta$ כך ש־ $f(x_1)=\alpha,\ f(x_2)=\beta$, אזי $\lim_{x\to a^+} f(x)$ לא קיים.
הוכחה: נניח בשלילה שקיים גבול L ולכן עבור $0 < \epsilon = ...$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $a < x < a+\delta$ מתקיים $|f(x)-L| < \epsilon$. נבחר $a < x_1, x_2 < a+\delta$ כפי שנתון בטענה כך ש־ $f(x_1)=\alpha,\ f(x_2)=\beta$, ונציב בתנאי $|f(x)-L| < \epsilon$.

$$\begin{aligned}-\epsilon < \quad & \alpha - L \quad < \epsilon\\ -\epsilon < \quad & \beta - L \quad < \epsilon\end{aligned}$$

נכפול אי־שוויון אחד ב־(-1)

$$\begin{aligned}-\epsilon < \quad & \alpha - L \quad < \epsilon\\ -\epsilon < \quad & L - \beta \quad < \epsilon\end{aligned}$$

נחבר את האי־שוויונים ונקבל

$$.\alpha-\beta < 2\epsilon$$

כל שנותר כעת זה לבחור $\epsilon=\frac{\alpha-\beta}{4}$ ונקבל סתירה. ■

לכן נובע שלא קיים גבול לפונקציה (ניתן להראות שגם הגבול לא יכול להיות אינסופי אך נדלג על חלק זה כעת). נעבור להוכחת טענה 2.54.

הוכחה: נראה שלכל $\delta > 0$ קיימים $0 < x_1, x_2 < 0+\delta$ כך ש־ $\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = 1,\ \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = -1$ והטענה תוכח על בסיס טענת העזר.

עבור x_1 נדרוש כי: $0 < x_1 < \delta$ וגם $\frac{1}{x_1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$ עבור $k_1 \in \mathbb{Z}$. שילוב של התנאים נותן לנו את התנאי

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1} = x_1 < \delta \ \Rightarrow\ \frac{\frac{1}{\delta} - \frac{\pi}{2}}{2\pi} < k_1$$

ואנו יודעים כי בהכרח קיים כזה $k_1 \in \mathbb{Z}$ לכן $0 < \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k_1} = x_1 < \delta$ ומכאן נובע ש־ $\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = 1$. באותו האופן נבחר $0 < x_2 < \delta$ וגם $\frac{1}{x_2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_2$ עבור $k_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש־

$$\frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k_2} = x_2 < \delta \ \Rightarrow\ \frac{\frac{1}{\delta} - \frac{3\pi}{2}}{2\pi} < k_3.$$

נקבל ש־ $0 < \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi k_2} = x_2 < \delta$ ומכאן נובע ש־ $\sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = 1$. לכן ההוכחה נובעת מטענת העזר. ■

תרגיל 2.55 חשבו את הגבולות הבאים:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{(\cos(x)+1)x} =?$
- $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\pi} =?$
- $\lim_{x\to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) =?$

פתרון: נחשב כל מקרה בנפרד ועבור המקרה השני נשתמש בהחלפת משתנים יותר מורכבת.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{(\cos(x)+1)x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-2\sin^2(x)-1}{(\cos(x)+1)x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(x)}{(\cos(x)+1)x} = \\
&= \lim_{x\to 0} (-2)\cdot\sin(x)\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{(\cos(x)+1)} = \\
&= (-2)\cdot 0\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\pi} &\overset{t=x-\pi}{=} \lim_{t+\pi\to\pi} \frac{\cos\left(\frac{t+\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\frac{t}{2}} = \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\sin(t)=1$$

2.8 פונקציות מעריכיות

בדומה לפונקציות הטריגונומטריות, פונקציות מעריכיות יצא לנו לפגוש כבר מספר פעמים. פונקצית חזקה ולוגריתמים הן שת סוגי פונקציות שייצא לנו להשתמש בהן רבות בהמשך.

הגדרה 2.56 יהי מספר $0<a\neq 1$. פונקציה f נקראת פונקציה מעריכית עם בסיס a אם $f(x)=a^x$.

פונקציה מעריכית מאוד מוכרת לנו היא האקספוננט, $e^x=\exp(x)$, כאשר $e\cong 2.718$. האקספוננט הוא למעשה פונקציה מעריכית עם בסיס e. בהקשר הזה חשוב לציין שהמספר e הוא מספר אי־רציונלי מאוד מיוחד המתקבל מהגבול הבא:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}. \tag{11}$$

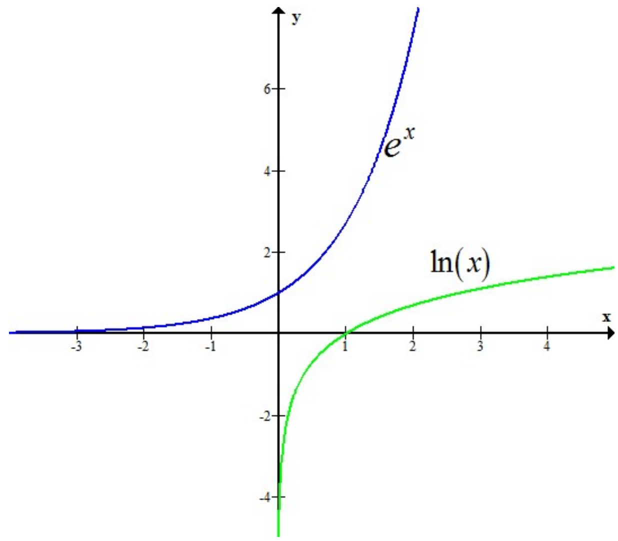
הגדרה 2.57 יהי מספר $0<a\neq 1$. נגדיר כי $\log_a y=x\Leftrightarrow a^x=y$. פונקציה $\log_a(\cdot)$ נקראת פונקציה לוגריתמית עם בסיס a והיא למעשה פונקציה הפוכה לפונקציה המעריכית עם בסיס a.

פונקציה לוגריתמית על בסיס e תסומן על ידי $\log_e(x)=\ln(x)$.

<u>תכונות חשובות בפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות וכללי חזקה:</u>

- $x^{a\cdot b}=(x^a)^b$.
- $x^{a+b}=x^a\cdot x^b$.
- $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.
- $\ln\left(a^b\right)=b\cdot\ln(a)$.
- $\ln(e^x)=x\cdot\ln(e)=x$.
- $e^{\ln(x)}=x$.

טענה 2.58 הוכיחו כי לכל $a>1$, $\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$.



איור 8: פונקציות e^x , $\ln(x)$

הוכחה: נזכור כי לפי הגדרה אנחנו צריכים להוכיח שלכל $K > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $f(x) = a^x > K$. יהי $K > 0$ וללא הגבלת הכלליות אני אניח ש־$K > 1$ (מותר לעשות הנחה כזאת כי אם נמצא M כך ש־$a^x > K$ עבור K שהוא גדול או שווה ל־1 אז זה יהיה נכון גם עבור $0 < K' \leq 1$). נבחר את $0 < M = \log_a K$ ונסתכל על x כך ש־ $x > M$.

$$a^x > a^M$$

נדרוש ש־ $a^M = K$ וזה קורה אם ורק אם $M = \log_a K$. כעת נובע ש־ $a^x > a^M = K$ ולכן $a^x > K$ לכל $x > M = \log_a K$ כנדרש. ■

טענה 2.59 הוכיחו כי לכל $0 < a < 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $\epsilon < 1$ (גם הנחה זו אינה מגבילה מאחר ואם נוכיח את הטענה עבור $\epsilon < 1$ אז היא בוודאי תהיה נכונה עבור $\epsilon' < 1$). נסתכל על x כך ש־ $x > M = \log_a \epsilon$. אנחנו רוצים להראות ש־ $|a^x - 0| < \epsilon$.

$$|a^x - 0| = |a^x| = a^x < a^M$$

האי־שוויון האחרון נכון מאחר ו־$x > M \Leftarrow a^x < a^M$ כאשר $0 < a < 1$. כעת נדרוש ש־$a^M = \epsilon$ שמתקיים אם ורק אם $M = \log_a \epsilon$ כפי שקבענו מלכתחילה. ■

נשתמש בטענות הללו שזה עתה הוכחנו בכדי להוכיח טענה הרבה יותר חזקה עבור פונקציות מעריכיות. בצמד הטענות הבאות נוכיח כי פונקציה מעריכית עם בסיס גדול מ־1 שואפת לאינסוף, ובנוסף נוכיח שהיא שואפת לאינסוף "יותר מהר" מכל פולינום שנבחר. ז"א, היחס בינה לבין כל פולינום כלשהו שואף לאינסוף כאשר $x \to \infty$.

טענה 2.60 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=0$.

הוכחה: נוכיח בעזרת משפט הסנדביץ'. נשים לב שהפונקציה חיובית עבור כל $x>0$ ולכן אנחנו צריכים למצוא רק פונקציה אשר חוסמת את הפונקציה הנתונה מלמעלה וגם כן שואפת לאפס. קרי, עבור $f(x)=\frac{x}{2^x}$ צריך למצוא $g(x)$, כך ש־

$$f(x)\leq g(x)$$

לכל $x>M$ עבור M חיובי כלשהו ובנוסף $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$. נוכיח כי לכל $x\geq 3$ מתקיים

$$f(x)\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{\lfloor x\rfloor-3}\cdot\frac{2^3}{3}\to 0$$

כאשר $x\to\infty$ (הגבול האחרון נובע מטענה קודמת עבור פונקציה מעריכית עם $0<a<1$). נבדוק למה האי־שיוויון האחרון נכון. נתחיל בכך שהפונקציה היא פונקציה יורדת. עבור $x\geq 1$ נקבל

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\frac{x+1}{2^{x+1}}\\&=\frac{x+1}{2^x\cdot 2}\cdot\frac{x}{x}\\&=\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{x}{2^x}\\&=\frac{x+1}{2x}\cdot f(x)\\&\leq 1\cdot f(x)=f(x),\end{aligned}$$

כאשר האי־שיוויון האחרון נובע מכך ש־

$$\begin{aligned}1&\leq x,\\1+x&\leq 2x,\\\frac{1+x}{2x}&\leq 1.\end{aligned}$$

כעת נשים לב שעבור $x\geq 3$ מתקיים

$$\begin{aligned}3&\leq x,\\3+3x&\leq 4x,\\\frac{3(1+x)}{2x}&\leq 2,\\\frac{1+x}{2x}&\leq\frac{2}{3},\end{aligned}$$

זאת אומרת, שעבור כל $x\geq 3$ מתקיים

$$f(x+1)=\frac{x+1}{2x}\cdot f(x)\leq\frac{2}{3}f(x).$$

דרך נוספת לרשום זאת היא

$$\begin{aligned} f(3+1) &\le \frac{2}{3} f(3) \\ f(3+2) &\le \frac{2}{3} f(3+1) \le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} f(3) \\ &\vdots \\ f(3+n) &\le \left(\frac{2}{3}\right)^n f(3) \end{aligned}$$

עבור n טבעי. בנוסף, נוכל לרשום כל $x \ge 3$ באופן הבא $3+(x-3)$ כאשר הביטוי השמאלי מאפשר לנו להשתמש בא"ש הקודם והביטוי מימין זו הסטייה שלנו מ־3 ומעלה. נשתמש במה שהוכחנו באופן אינדוקטיבי, עבור כל $x \ge 3$ ונקבל

$$\begin{aligned} f(x) &= f(3+(x-3)) \\ &\le f(3+\lfloor x-3 \rfloor), \end{aligned}$$

כאשר הא"ש נובע מכך שהפונקציה יורדת ולכן הפונקציה בנקודה $3+\lfloor x-3 \rfloor$ גדולה מהפונקציה בנקודה $3+(x-3)$ (כמובן, בגלל ש־ $3+x-3 \ge 3+\lfloor x-3 \rfloor$). נסמן $n = \lfloor x-3 \rfloor$ ונקבל

$$\begin{aligned} f(x) &\le f(3+\lfloor x-3 \rfloor) \\ &= f(3+n) \\ &\le \frac{2}{3}\cdot f(3+n-1) \\ &\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot f(3+n-2) \\ &\le \cdots \\ &\le \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot f(3+n-n) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\lfloor x-3 \rfloor} \cdot f(3) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\lfloor x \rfloor -3} \cdot \frac{2^3}{3}, \end{aligned}$$

הא"ש הנ"ל נובעים מהא"ש שקודמים להם, ובכך הוכחנו את הא"ש שמסכם את ההוכחה. ■

נשתמש בטענה הנ"ל בכדי להוכיח טענה יותר כללית. נוכיח כי היחס בין כל פולינום לבין כל פונקציה מעריכית עם בסיס גדול מ־1 הולך לאפס (במקרה הקודם נגע רק בבסיס $a=2$ ופולינום לינארי, קרי $m=1$). בהוכחה הזאת נשתמש בטענה הקודמת, בארתמטיקה של גבולות והחלפת משתנה.

טענה 2.61 לכל $a>1$ ולכל m טבעי מתקיים $\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$.

הוכחה: יהיו $a>1$ ו־m טבעי. נחשב את הגבול ישירות, אך תחילה נפתח את הפונקציה ונבצע החלפת משתנה. נסמן

$$r\equiv a^{1/m}$$

ו־

$$y\equiv\frac{x}{\log_r(2)}.$$

לכן משילוב צמד ההגדרות נקבל

$$\begin{aligned} y\log_r(2)&=x,\\ \log_r(2^y)&=x,\\ r^{\log_r(2^y)}&=r^x,\\ 2^y&=\left(a^{1/m}\right)^x,\\ 2^y&=a^{x/m}. \end{aligned}$$

הפונקציה הנתונה שווה ל־

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x^m}{a^x}\\ &=\left[\frac{x}{a^{x/m}}\right]^m\\ &=\left[\frac{y\log_r(2)}{2^y}\right]^m\\ &=(\log_r(2))^m\left[\frac{y}{2^y}\right]^m. \end{aligned}$$

לכן, נבצע החלפת משתנים בגבול מ־x ל־ $y=\frac{x}{\log_r(2)}$ ונקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{a^x}=\lim_{y\to\infty}(\log_r(2))^m\left[\frac{y}{2^y}\right]^m=(\log_r(2))^m\,0^m=0,$$

כאשר חישוב הגבול לאחר החלפת המשתנה נובע מהטענה הקודמת שאומרת ש־$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=$ 0ו־$(\log_r(2))^m$ הוא קבוע. ■

<u>גבולות מוכרים:</u>

חוץ מהגבול המאוד חשוב לזכור שראינו במשוואה (11) ישנם גבולות נוספים שחשוב לזכור.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a).$$

נוכל להגיע לחישובי גבולות אלו בעזרת הגבולות המתוארים במשוואה (11) ובעזרת הגדרת הרציפות של פונקציות.

תרגיל 2.62 חשבו את הגבולות הבאים:

- $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=?$.
- $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=?$.
- $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(x)}=?$.
- $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+2e^{-x}\right)}{\sin(e^{-x})}=?$.
- $\lim_{x\to0^{+}}(1+x)^{\frac{1+x}{2x^{2}}}=?$.
- $\lim_{x\to\infty}\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right)=?$.
- $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x}}{(x+b)^{x}}=?$.

פתרון: נפתור כל סעיף בנפרד וחלק מן הסעיפים נפתור בשתי דרכים.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}\overset{t=-x}{=}\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{a}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{e^{-a}}=e^{a}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(e)=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{x}{\sin(x)}\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}=2\cdot1\cdot1=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2e^{-x})}{\sin(e^{-x})}\overset{t=e^{-x}}{=}\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+2t)}{\sin(t)}=2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^{+}}(1+x)^{\frac{1+x}{2x^{2}}}&=\lim_{x\to0^{+}}e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1+x}{2x^{2}}}\right)}=\lim_{x\to0^{+}}e^{\frac{1+x}{2x^{2}}\ln(1+x)}=\\&=\lim_{x\to0^{+}}e^{\frac{1+x}{2x}\frac{\ln(1+x)}{x}}\overset{\text{"}e^{\infty\cdot1}\text{"}}{=}\infty\end{aligned}$$

דרך אחרת אפשרית:

$$\lim_{x\to0^{+}}(1+x)^{\frac{1+x}{2x^{2}}}=\lim_{x\to0^{+}}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1+x}{2x}}\overset{\text{"}e^{\infty}\text{"}}{=}\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\ln(1)=0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^x}{(x+b)^x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+b-b+a}{x+b}\right)^x = \\ &= = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{x+b-b} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a-b}{x+b}\right)^{-b}} = \\ &= \frac{e^{a-b}}{1} = e^{a-b}\end{aligned}$$

תרגיל 2.63 נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}$.

1. מצאו את תחום ההגדרה הטבעי של f.
2. האם הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים?
3. חשבו את הגבולות: $\lim_{x\to -1^+} f(x)\,,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

פתרון: נתייחס לכל סעיף בנפרד.

1. עבור $x>1$ ו־ $x<-1$ אנחנו מקבלים מצב בו $\frac{1+x}{1-x}$ הוא שלילי ואז פונקציות הלוגריתם איננה מוגדרת. לכן $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$.
2. נחשב את הגבול ישירות ונעזר בגבולות מוכרים ואריתמטיקה של גבולות.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = \\ &= 1-\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{-t} = 1+\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

3. נחשב כל גבול בנפרד.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+x)}{x} - \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \frac{\ln(1+1)}{1} - \lim_{t\to 0^-}\frac{\ln(-t)}{t+1} = \infty\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(1+x)}{x} - \lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(1-x)}{x} \\
&= \lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(2)}{-1} = -\infty
\end{aligned}
$$

2.9 רציפות של פונקציה

בדומה למושג הגבול, גם למושג הרציפות של פונקציה יש לנו אינטואיציה די טובה. אנחנו מבינים, לדוגמא, שאם ניתן לשרטט גרף של פונקציה בלי להרים את העט מן הדף בצורה מדוייקת אזי הפונקציה רציפה. אבל - מה ההגדרה המתמטית המדוייקת לפונקציה רציפה?

הגדרה 2.64 פונקציה f היא פונקציה רציפה בנקודה $a \in \mathbb{R}$ אם

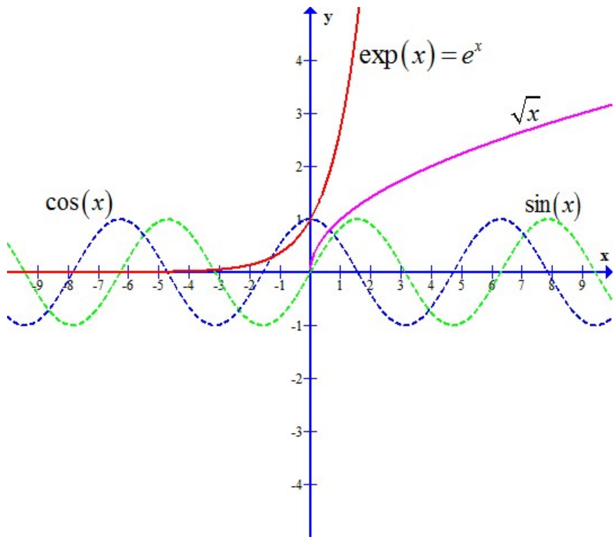
$$
\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{12}
$$

שימו לב! ישנם 3 דברים שצריכים להתקיים בכדי שפונקציה תהיה רציפה בנקודה $a \in \mathbb{R}$, אשר נובעים מתוך ההגדרה:

1. הפונקציה צריכה להיות מוגדרת בנקודה $a \in \mathbb{R}$. אם הפונקציה איננה מוגדרת בנקודה אזי אגף שמאל במשוואה (12) לא מוגדר היטב.
2. לפונקציה צריך להיות גבול בנקודה $a \in \mathbb{R}$. בדומה להערה הקודמת, אם אין גבול בנקודה אזי אגף ימין של משוואה (12) לא קיים.
3. הגבול של הפונקציה בנקודה צריך להיות שווה לפונקציה בנקודה כפי שנדרש המשוואה הנ"ל.

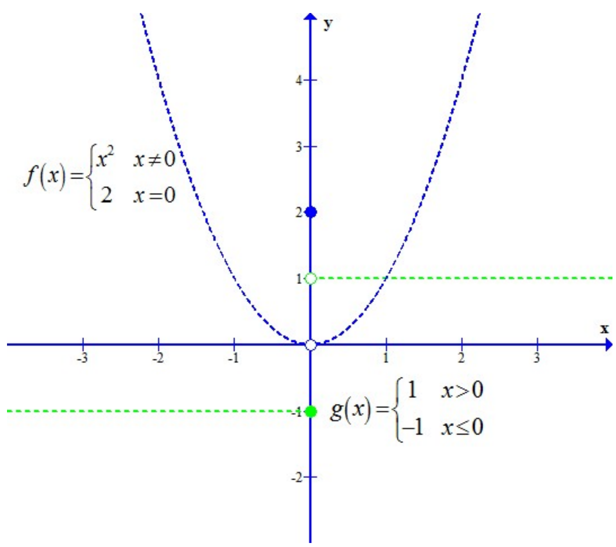
הגדרה 2.65 פונקציה f היא פונקציה רציפה בקטע (a,b) אם היא רציפה בכל נקודה בקטע זה. פונקציה f תקרא פונקציה רציפה אם היא רציפה בכל נקודה בתחום ההגדרה הטבעי שלה.

ישנן פונקציות רבות רציפות שאנו כבר מכירים: $\sin(x),\ \cos(x),\ e^x,\ \ln(x),\ x^2,\ \sqrt{x}$, כל פולינום שראינו עד כה (פרבולה, קו ישר, פונקציה ממעלה שלישית וכן הלאה) ועוד ועוד...



איור 9: פונקציות רציפות

באותה מידה, יצא לנו גם לראות פונקציות שאינן רציפות לדוגמא, פונקציות מדרגה, פונקציות עם ערכים מפוזרים, דיריכלה וכן הלאה.



איור 10: פונקציות לא רציפות - פונקצית מדרגה ופרבולה ללא נקודה

ישנם מספר כללים ומשפטים שיסייעו לנו מאוד בחישובי גבולות בכל מה קשור לפונקציות רציפות.

משפט 2.66 אם f,g רציפות, אזי $g\circ f,\ f\circ g$ רציפות.

המשפט אומר שהרכבה של פונקציות רציפות היא גם רציפה. אבל במידה והפונקציות רק רציפות בנקודות מסויימות עדיין ניתן להסתכל על הגדרת הרציפות של ההרכבות הללו.

משפט 2.67 אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו־$g(x)$ רציפה בנקודה L, אזי הפונקציה $g\circ f$ רציפה בנקודה a ומתקיים ש־ $\lim_{x\to a} g(f(x))=g(L)$.

המשפט האחרון מתייחס להרכבה של פונקציות בנקודה בודדת. ישנן מספר פונקציות שאנו יודעים כי הן רציפות:

- פולינומים.
- פונקציות טריגונומטריות (שימו לב כי $\tan(x)$ היא פונקציה רציפה בכל נקודה בתחום ההגדרה הטבעי שלה, ובנקודות בהן יש התבדרות, היא לא מוגדרת ולכן עדיין רציפה).
- $x^{\frac{1}{n}}$.
- $|x|$.
- $a^x\ \forall a>0\ ,\ \ln(x)$.
- אם f,g רציפות, אזי גם $f\pm g,\ f\cdot g$ ואם $g(x)\neq 0$ אזי גם $\frac{f}{g}$.

תרגיל 2.68 הוכיחו כי הפונקציה $\ln(x)$ רציפה בכל $x>0$.

פתרון: יהי $x_0\in\mathbb{R}$. נוכיח כי הפונקציה רציפה ב־x_0. תחילה נשים לב שהפונקציה מוגדרת בנקודה - $\ln(x_0)=y \Leftrightarrow e^y=x_0$ (מאחר ופונקצית האקספוננט מקבלת כל ערך אי־שלילי והיא חח"ע, נובע ש־y קיים ויחיד). כעת נראה ש־$\lim_{x\to x_0}\ln(x)=\ln(x_0)$. נשים לב שבאופן שקול, ע"י החלפת משתנים $h=x-x_0$ ניתן להוכיח ש־

$$\lim_{h\to 0}\ln(x_0+h)=\ln(x_0)\,.$$

אנחנו נראה ש־

$$\lim_{h\to 0}\ln(x_0+h)=\ln(x_0)\,.$$

יהי $\epsilon>0$. נבחר $0<\delta$ שייקבע בהמשך ונסתכל על h כך ש־ $0<|h|<\delta$.

$$\begin{aligned}|\ln(x_0+h)-\ln(x_0)| &= \left|\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)\right| = \\ &= \left|\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right|.\end{aligned}$$

אנחנו רוצים ש־ $\left|\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right|<\epsilon$ ולכן זה שקול לכך ש־

$$\begin{aligned}-\epsilon < &\quad \ln\left(1+\tfrac{h}{x_0}\right) &< \epsilon\\ e^{-\epsilon} < &\quad 1+\tfrac{h}{x_0} &< e^{\epsilon}\\ x_0\left(e^{-\epsilon}-1\right) < &\quad h &< x_0\left(e^{\epsilon}-1\right)\end{aligned}$$

ולכן נדרוש ש־ $|h| < \min\{x_0(e^{\epsilon}-1), |x_0(e^{-\epsilon}-1)|\}$, זאת אומרת

$$\delta = \min\left\{x_0(e^{\epsilon}-1), \left|x_0\left(e^{-\epsilon}-1\right)\right|\right\}.$$

במקרה זה, המעברים שרשמנו הם מעברים דו־כיווניים (אם ורק אם) ולכן מתקיים התנאי הנדרש.

תרגיל 2.69 מצאו עבור אילו ערכי A, B, C הפונקציה הבאה רציפה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2Ax + 5C \cdot \cos(x), & x < 0, \\ B, & x = 0, \\ \frac{\tan(2x)}{x}, & x \in (0, \pi/8]. \end{cases}$$

פתרון: נתחיל בכך שנבחן האם בכל תחום בפני עצמו הפונקציה רציפה. כאשר $x < 0$ אז הפונקציה שווה ל־$f(x) = x^2 - 2Ax + 5C \cdot \cos(x)$. כל גורם בביטוי הזה הוא רציף בפני עצמו (הפונקציות $x^2,\ 2Ax,\ 5C \cdot \cos(x)$ הן פונקציות רציפות) ולכן גם חיבור וחיסור שלהן ייתן פונקציה רציפה. כאשר $x > 0$ אזי יש חלוקה של 2 פונקציות רציפות והמכנה לא מתאפס (x, $\tan(2x)$) ולכן גם בתחום זה הפונקציה רציפה.

ראינו שעבור $x < 0,\ x > 0$ הפונקציה רציפה ולכן מה שנותר לנו כעת זה לוודא שבנקודה $x = 0$ הפונקציה רציפה. נחשב את הגבול מימין ומשאל בנקודה $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(2x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos(2x)} \cdot \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\cos(2x)} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

לכן נצטרך לדרוש ש־$B = 2$ בכדי ש־ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$. נחשב את הגבול החד־צדדי $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ונדרוש שגם הוא יהיה שווה ל־$B = 2$.

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 - 2Ax + 5C \cdot \cos(x) = 0 - 0 + 5C = 5C.$$

לכן נקבע ש־ $A \in \mathbb{R},\ B = 2,\ C = \frac{2}{5}$ ואז

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2.$$

תרגיל 2.70 קבעו האם הפונקציה הבאה רציפה?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & x > 0 \\ \left(8 - x^2\right)^{\frac{1}{3}} & -\sqrt{8} \le x \le 0 \\ 0 & x < -\sqrt{8} \end{cases}$$

פתרון: בכל תחום בפני עצמו אנו רואים שהפונקציה רציפה –

- אם $x > 0$ אזי פונקציה שווה לחלוקה של 2 פונקציות רציפות $(\sin(2x)\ ,\ x)$ כאשר המכנה אינו מתאפס ולכן הפונקציה עצמה רציפה.
- אם $x < -\sqrt{8}$ אז הפונקציה היא קבועה ובפרט רציפה (היא שווה לגבול שלה בכל נקודה).
- אם $-\sqrt{8} \leq x \leq 0$ אזי הפונקציה היא הרכבה של פונקציות רציפות $\left(8 - x^2,\ \sqrt[3]{\ }\right)$ ולכן בפרט היא רציפה.

כעת נצטרך לבחון רציפות במעברים שבין התחומים השונים. נתחיל בנקודה $x = -\sqrt{8}$.

$$\lim_{x \to -\sqrt{8}^-} f(x) = \lim_{x \to -\sqrt{8}^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{8}^+} f(x) = \lim_{x \to -\sqrt{8}^+} \left(8 - x^2\right)^{\frac{1}{3}} = 0$$

ובפרט $f\left(-\sqrt{8}\right) = 0$ ולכן הגבול קיים בנקודה ושווה לערך של הפונקציה בה, והיא רציפה לפי הגדרה. נעבור לבחון את הנקודה $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(8 - x^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2$$

ובפרט $f(0) = 2$ לכן

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

והפונקציה רציפה בכל תחום ההגדרה שלה.

תרגיל 2.71 תהי פונקציה $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ רציפה בנקודה $x = 0$.

1. האם ייתכן ש־$f(x) < 0$ לכל $x < 0$ ובנוסף $f(x) > 0$ לכל $x > 0$?
2. האם ייתכן שקיים $t > 0$ כך ש־ $f(x) < -t$ לכל $x < 0$ ובנוסף $f(x) > t$ לכל $x > 0$?

פתרון: התשובה לשאלה הראשונה היא כן וזאת ניתן לראות על ידי דוגמא פשוטה. ניקח את $f(x)=x$. אנו יודעים כי זאת פונקציה רציפה בקטע $(-1,1)$ (ובכל הישר הממשי בכלל) ובנוסף עבור $x>0$, $f(x)>0$ ועבור $x<0$ מתקיים ש־ $f(x)<0$ כנדרש.

התשובה לשאלה השנייה היא לא. נניח בשלילה שזה אפשרי ולכן קיים t כך ש־ $f(x)<-t$ לכל $x<0$ ובנוסף $f(x)>t$ לכל $x>0$ ובנוסף הפונקציה רציפה ב־0.

אם הפונקציה רציפה משמע יש לה גבול בנקודה 0 ולכן יהי $\epsilon=\frac{t}{4}$. קיים $\delta>0$ כך שלכל $\delta>|x|>0$ מתקיים $|f(x)-f(0)|<\frac{t}{4}$. נבחר $-\delta<x_1<0<x_2<\delta$ ונציב את ערכי הפונקציה בנקודות הללו באי־שוויון,

$$|f(x_1)-f(0)|<\frac{t}{4}$$
$$|f(x_2)-f(0)|<\frac{t}{4}.$$

נפתח את צמד האי־שוויונים ונשלב אותם

$$-\frac{t}{4}+f(0)<f(x_1)<-t$$
$$t<f(x_2)<f(0)+\frac{t}{4},$$

נקבל לבסוף ש־ $\frac{3t}{4}<f(0)<-\frac{3t}{4}$, סתירה.

2.9.1 אי רציפות של פונקציה

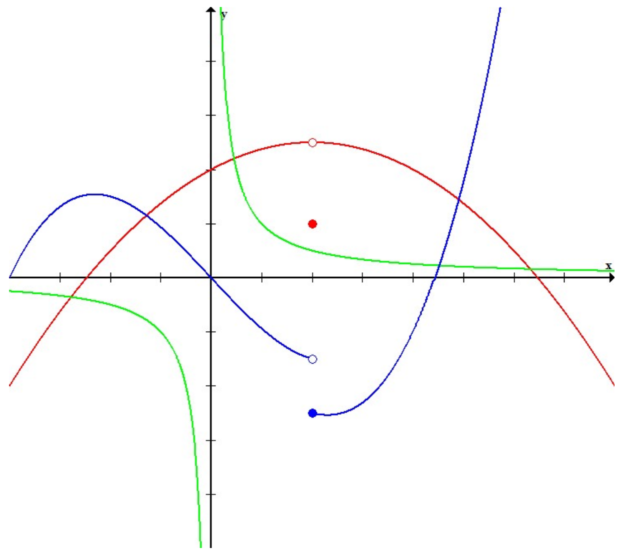
יכולים להיות מצבים בהם פונקציה איננה רציפה. עד כה ראינו מספר פונקציות לא רציפות, דוגמת פונקציית דיריכלה ועוד.

נניח כי פונקציה f לא רציפה בנקודה $a\in\mathbb{R}$. אנחנו נקרא ל־a נקודת אי־רציפות ונוכל למיין את נקודת אי־רציפות זו במספר אופנים:

- $f(a)$ לא מוגדר. הפונקציה איננה מוגדרת בנקודה a אבל הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים. לכן נקרא לנקודה ־ **נקודת אי־רציפות סליקה**. כל מה שצריך זה להגדיר את הפונקציה בנקודה ולקבוע ש־ $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ ואז הפונקציה רציפה.
- הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים והפונקציה מוגדרת בנקודה אבל $f(a)\neq\lim_{x\to a}f(x)$. גם זאת נקודת אי־רציפות סליקה כי נוכל להגדיר מחדש את הפונקציה בנקודה בכדי שתהיה רציפה.
- נקודות אי־רציפות לא סליקות:
  - מין I ־ ישנה קפיצה בפונקציה. הגבולות החד־צדדיים שונים זה מזה

    $$\lim_{x\to a^-}f(x)\neq\lim_{x\to a^+}f(x),$$

    ולכן אין גבול בנקודה a.



איור 11: נקודות אי־רציפות שונות (סליקות ולא סליקות). לפונקציה באדום יש נקודת אי רציפות סליקה, לפונקציה בכחול יש נקודת אי רציפות מסוג I ולפונקציה בירוק יש נקודת אי רציפות מסוג II.

– מין II ־ לפחות אחד מהגבולות החד־צדדיים לא קיים או אינסופי.

משפט 2.72 (משפט ערך הביניים) תהי פונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח כי $f(a)\cdot f(b) < 0$ (כלומר לפונקציה יש סימנים מנוגדים בקצוות הקטע), אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־ $f(c) = 0$.

המשפט אומר שאם יש פונקציה רציפה שמקבלת בקטע מסויים ערכים מעל אפס ומתחת לאפס אז מתישהו בקטע הזה היא חייבת לקבל את המספר 0 גם כן. ישנה גרסה נוספת למשפט (הכללה).

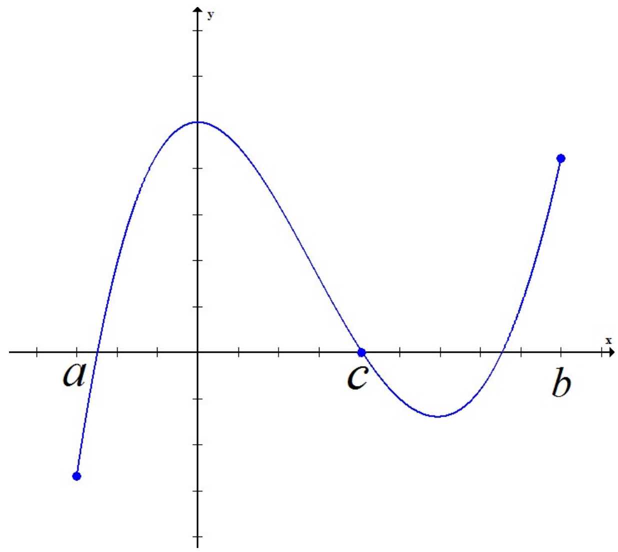
משפט 2.73 (משפט ערך הביניים המוכלל) תהי פונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ ונניח כי $f(a) < d < f(b)$ או לחילופין $f(a) > d > f(b)$, אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־ $f(c) = d$.

הוכחה: נגדיר פונקציה חדשה $g(x) = f(x) - d$. הפונקציה היא חיסור של שתי פונקציות רציפות $f(x), d$ ולכן גם g רציפה. בנוסף, $g(a)\cdot g(b) < 0$ מאחר ו־

$$g(a) = f(a) - d < 0 < f(b) - d = g(b).$$

לכן לפי משפט ערך הביניים נובע שקיים $a < c < b$ כך ש־ $g(c) = 0 \Leftarrow f(c) - d = 0$.■

תרגיל 2.74 הוכיחו כי לכל $0 < a < 1$ ו־$n \in \mathbb{N}$ טבעי, למשוואה $2^x = a + (2x)^n$ יש פתרון בקטע $(0,1)$.



איור 12: משפט ערך הביניים ־ הפונקציה רציפה ולכן חייבת לקבל מתישהו את הערך 0 בקטע $[a,b]$.

פתרון: יהי $0<a<1$ ו־$n\in\mathbb{N}$ טבעי, ונצטרך להוכיח כי למשוואה $2^x=a+(2x)^n$ יש פתרון בקטע $(0,1)$. נגדיר את הפונקציה $f(x)=2^x-a-(2x)^n$ ואם נמצא נקודה $c\in(0,1)$ כך ש־ $f(c)=0$ אזי $c\in(0,1)$ הוא פתרון למשוואה המתבקש. לשם כך נרצה להשתמש במשפט ערך הביניים. נשים לב ש־f היא חיבור, חיסור ומכפלה של פונקציות רציפות ולכן היא פונקציה רציפה. בנוסף, $f(0)=2^0-a+(2\cdot 0)^n=1-a>0$ וכן $f(1)=2-a-2^n<0$ לכן קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש־ $f(c)=0$ כנדרש.

תרגיל 2.75 אם $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה הראו כי קיים $c\in[0,1]$ כך ש־ $f(c)=c^2$.

פתרון: נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=f(x)-x^2$ ונשים לב שמדובר בפונקציה רציפה כחיסור של פונקציות רציפות.

$$\begin{cases} g(0)=f(0)-0=f(0) & \geq 0 \\ g(1)=f(1)-1 & \leq 0 \end{cases}$$

לכן קיבלנו ש־ $g(1)\cdot g(0)\leq 0$. ננתח כעת את המצב בו $g(1)\,g(0)=0$.

אם $g(0)\,g(1)=0$ אזי ישנם מספר מצבים אפשריים:

- $g(0)=0\ ,\ g(1)<0$: לכן נובע ש־ $f(0)=0$ והטענה מתקיימת.
- $g(1)=0\ ,\ g(0)>0$: לכן נובע ש־ $f(1)=1$ והטענה מתקיימת.
- $g(1)=0\ ,\ g(0)=0$: לכן נובע ש־ $f(1)=1$ וגם $f(0)=0$ והטענה מתקיימת.

ובכל מקרה הטענה מתקיימת. אחרת, $g(1)\cdot g(0)<0$, מה שאומר ש־ $g(0)>0,\ g(1)<0$ ולפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in[0,1]$ כך ש־ $g(c)=f(c)-c^2=0$ והטענה מתקיימת.

תרגיל 2.76 הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע (a,b) ובנוסף $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־ $f(c)=0$.

פתרון: נרצה למצוא 2 נקודות $x_1,x_2\in(a,b)$ כך ש־ $f(x_1)>0,\ f(x_2)<0$. נבחר $M_1=1$ ומהגדרת הגבול נובע שקיימת $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in(a,a+\delta_1)$ מתקיים $f(x)>1$ ובפרט בנקודה $x_1=\frac{a+a+\delta_1}{2}$ מתקיים ש־ $f(x_1)>0$. באופן דומה נבחר $M_2=-1$ ולפי הגדרת הגבול קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in(b-\delta_2,b)$ מתקיים ש־ $f(x)<-1$ ובפרט בנקודה $x_2=\frac{b-\delta_2+b}{2}$ מתקיים ש־ $f(x_2)<0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים נובע שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־ $f(c)=0$.

תרגיל 2.77 תהיי פונקציה $f(x)=x^5-3x+\frac{1}{2}$. הראו שקיימים למשוואה $f(x)=0$ שתי פתרונות בקטע $[0,2]$ ומצאו את 2 הספרות הראשונות של הפתרון הקטן מבינהם.

פתרון: נשים לב כי $f(0)>0$, $f(1)<0$ ו־ $f(2)>0$ ולכן ניתן להפעיל את משפט ערך הביניים פעמיים ־ פעם אחת עבור הקטע $[0,1]$ ופעם אחרת עבור הקטע $[0,2]$. על כן קיימים $x_1\in[0,1]$ ו־$x_2\in[1,2]$ כך ש־ $f(x_1)=f(x_2)=0$ כפי שנדרש להוכיח בשאלה. אנחנו צריכים למצוא את 2 הספרות הראשונות של x_1. לשם כך נשתמש בשיטת החצייה. נקבל את התוצאות הבאות:

$$f(x)\approxeq\begin{cases}0.5 & x=0\\ -1.5 & x=1\\ -0.96 & x=0.5\\ -0.24 & x=0.25\\ 0.12 & x=0.125\\ -0.06 & x=0.1875\\ 0.031 & x=0.15625\end{cases}$$

לכן שתי הספרות הראשונות הן $x_1\approxeq 0.1$. שימו לב שהשגיאה שלנו תמיד תהיה שווה ל־ $\frac{b-a}{2^n}$ כאשר $b-a$ מציין אורך הקטע ההתחלתי ו־ n מציין מספר החציות / איטרציות שביצענו.

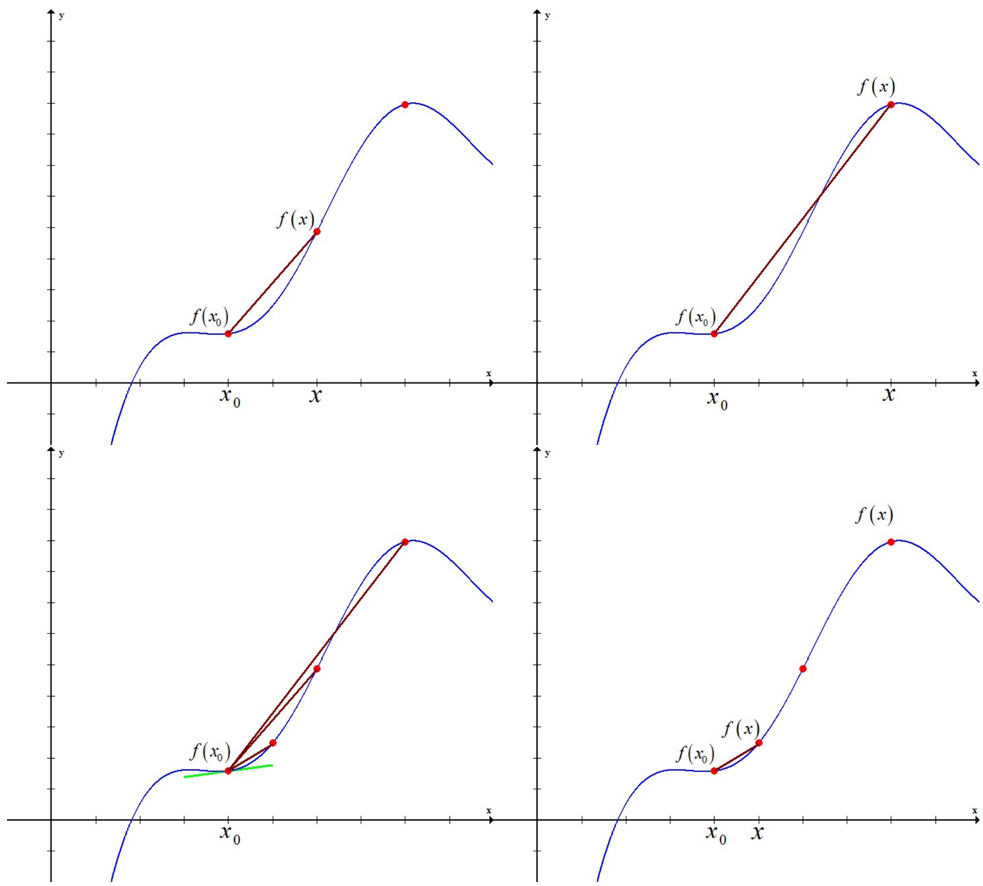
משפט 2.78 (משפט ויירשטראס) תהיי פונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, אזי קיימת נקודה $x_1\in[a,b]$ שהיא נקודת מקסימום של הפונקציה בקטע, וכן קיימת נקודה $x_2\in[a,b]$ נקודת מינימום של הפונקציה בקטע זה.

הדרישה שהקטע יהיה קטע סגור וכן שהפונקציה תהיה רציפה הן דרישות חיוניות מאחר ולא בהכרח תהיינה נקודות אלו במקרים בהם הפונקציה לא רציפה או שאין את נקודות הקצה.

3 נגזרת

מושג הנגזרת מוכר לנו מזה זמן רב. בין אם מדובר בנגזרת של פולינום או פונקציה טריגונמטרית שהכירו לנו בתיכון, ובין אם במושגים פשוטים כמו "מהירות" שמציגה את השינוי במרחק כפונקציה של הזמן. אולם, עד כה לא יצא לנו לראות מדוע הנגזרת היא למעשה מה שהראו לנו. מצד אחד קיבלנו את הנוסחאות השונות לחישוב נגזרת של פונקציה ומצד שני נאמר לנו שמדובר בשיפוע של הגרף בנקודה, אבל עולה השאלה ־ כיצד הדברים האלה הולכים יחדיו? מדוע זו הנוסחה של הנגזרת ועל בסיס מה אנחנו קובעים שזה השיפוע של הפונקציה בנקודה?

ובכן, האינטואיציה לכך היא ממש לא מסובכת. נניח שיש לנו פונקציה כלשהי f כפי שמוצג בשרטוט, ואנחנו רוצים למצוא את השיפוע של בנקודה x_0. לשם כך אנחנו עושים פעולה די פשוטה והיא, לוקחים נקודה x על פני הגרף, ומתקרבים איתה לעבר x_0 (ראו איור 13 בעמוד 66).



איור 13: הנגזרת של פונקציה f בנקודה x_0. שימו לב כיצד הקווים הישרים (החומים) מתקרבים לשיפוע האמיתי בנקודה (הקו הירוק).

בכל שלב אנחנו מסתכלים על השיפוע של הקו הישר שעובר בין 2 הנקודות - $A=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (אם הנוסחה הזאת מוכרת לכם אז זה כנראה מהתיכון, מאחר ושם ראינו שהשיפוע בין 2 נקודות הוא $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$). מהניסוי בשלבים הזה אנחנו מקבלים את מושג הנגזרת, ואנחנו רואים שהשיפוע בנקודה זה בעצם הגבול

$$.f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{h=x-x_0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

טענה 3.1 אם f פונקציה שגזירה בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$, אזי היא רציפה בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$.

הוכחה: תהי פונקציה f ונניח שהיא גזירה בנקודה x_0. ז"א, שהגבול

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{13}$$

קיים. צריך להוכיח ש־ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. יהי $\epsilon>0$. מאחר והגבול במשוואה (13) קיים, ישנה $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_o|<\delta$ מתקיים

$$.\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\epsilon$$

מתוך אי־שוויון המשולש ההפוך נקבל ש־

$$,\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|-|f'(x_0)|\leq\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\epsilon$$

ולכן, לאחר העברת אגפים וכפל במכנה נקבל

$$.\,|f(x)-f(x_0)|<(\epsilon+|f'(x_0)|)\,|x-x_0|$$

כעת נוכל לבחור $\delta<\frac{\epsilon}{\epsilon+|f'(x_0)|}$ ונקבל שלכל $0<|x-x_o|<\delta$ מתקיים

$$|f(x)-f(x_0)|<(\epsilon+|f'(x_0)|)\,|x-x_0|<(\epsilon+|f'(x_0)|)\frac{\epsilon}{\epsilon+|f'(x_0)|}=\epsilon$$

כנדרש. ■

דרך אחרת להוכיח את הטענה הזאת היא בעזרת חישוב גבולות.

הוכחה: תהי פונקציה f ונניח שהיא גזירה בנקודה x_0. צריך להוכיח ש־ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x) &= \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)+f(x_0)]=\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right]=\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\cdot\lim_{x\to x_0}[x-x_0]+f(x_0)=\\ &= f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)\end{aligned}$$

כנדרש. (שימו לב שהמעבר השלישי נובע מכך שצמד הגבולות קיימים ולכן הגבול של המכפלה שווה למכפלת הגבולות כפי שראינו בכללי אריתמטיקה של גבולות). ■

תרגיל 3.2 הוכיחו כי $f(x) = \left|x^2 - 2x\right|$ איננה גזירה ב־$x = 2$.

פתרון: לשם ההוכחה נסתכל על הגבולות החד־צדדיים.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{\left|x^2-2x\right| - \left|2^2 - 2\cdot 2\right|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\left|x^2-2x\right|}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = \\ &\lim_{x\to 2^+} x = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{\left|x^2-2x\right| - \left|2^2 - 2\cdot 2\right|}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\left|x^2-2x\right|}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-\left(x^2-2x\right)}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} -x = -2\end{aligned}$$

ואנו רואים שהגבולות החד־צדדיים שונים זה מזה ולכן הגבול לא קיים, משמע הפונקציה איננה גזירה.

תרגיל 3.3 תהי f פונקציה רציפה בנקודה $x = 0$ ו־ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. הוכיחו כי $f'(0) = 0$.

פתרון: נוכיח כי $f(0) = 0$. אם נראה זאת אזי נובע ש־

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 0}{x-0} = 0$$

ולכן הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$ ומתקיים ש־ $f'(0) = 0$. נניח בשלילה ש־ $f(0) \neq 0$ ולכן $f(0) > 0$ או $f(0) < 0$. בנוסף, נזכור כי הפונקציה רציפה ב־0 ולכן מתקיים ש־ $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. על כן נובע ש־

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \infty & f(0) > 0 \\ -\infty & f(0) < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}-\infty & f(0)>0\\ \infty & f(0)<0\end{cases}$$

ובכל מקרה מקבלים בסתירה לנתון $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ ומכאן נסיק ש־ $f(0)=0$ והטענה מתקיימת.

תרגיל 3.4 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x=x_0$, אז $|f(x)|$ גם גזירה בנקודה $x=x_0$.
2. אם $|f(x)|$ גזירה בנקודה $x=x_0$, אז $f(x)$ גם גזירה בנקודה $x=x_0$.

פתרון: בשני המקרים התשובה היא שלילית ומדובר בטענות לא נכונות. נדגים זאת בעזרת דוגמאות נגדיות.

1. דוגמא נגדית פשוטה היא $f(x)=x$ והנקודה $x_0=0$. אנחנו יודעים שהפונקציה היא גזירה, אך יחד עם זאת, $|x|$ לא גזירה בנקודה 0.
2. דוגמא נגדית היא פונקצית דיריכלה מעודכנת באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

הפונקציה הזאת איננה רציפה ולכן כלל איננה גזירה, אבל יחד עם זאת, $|f(x)|=1$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן היא רציפה וגזירה על כל הישר הממשי.

3.1 אריתמטיקה של נגזרות ונגזרות של פונקציות מוכרות

באופן דומה לארתמטיקה של גבולות ורציפות, ישנן מספר תכונות יחסית מוכרות עבור נגזרות. כלל התכונות הללו נובעות באופן ישיר מאריתמטיקה של רציפות כאשר גם הן נובעות באופן ישיר מאריתמטיקה של גבולות.

יהיו 2 פונקציות f,g גזירות בנקודה x_0 אזי:

1. $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
2. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$.
4. $(f\circ g)'(x_0)=g'(x_0)\cdot f'(g(x_0))$, כאשר g גזירה בנקודה x_0 ו־f גזירה בנקודה $g(x_0)$.

באופן דומה לפונקציות שזיהינו כרציפות, ישנן נגזרות מוכרות לפונקציות שראינו עד כה. בכל פעם שנפגוש נגזרת של פונקציה שכזו, נוכל להשתמש בזהויות הבאות כנוסחאות:

- $n \neq 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$.
- $(\sin(x))' = \cos(x)$.
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$.
- $a > 0 \quad (a^x)' = a^x \ln(a)$.
- $(e^x)' = e^x$.
- $(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$.
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

נעזר בכללים אלו רבות בהמשך, בכדי למצוא נגזרות של פונקציות.

תרגיל 3.5 מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

- $f(x) = \ln\left(e^{\sin(x)} + x\right)$.
- $f(x) = x^x$.

פתרון: נחשב את הנגזרת לכל פונקציה בנפרד.

$$\begin{aligned}\left[\ln\left(e^{\sin(x)} + x\right)\right]' &= \frac{1}{e^{\sin(x)} + x}\left[e^{\sin(x)} + x\right]' = \frac{1}{e^{\sin(x)} + x}\left[\left(e^{\sin(x)}\right)' + (x)'\right] \\ &= \frac{e^{\sin(x)}\cos(x) + +1}{e^{\sin(x)} + x}\end{aligned} .$$

$$\begin{aligned}[x^x]' &= \left(e^{\ln(x^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = \\ &= e^{x\ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \\ &= e^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

תרגיל 3.6 מצאו את כל ערכי a עבורם הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

1. רציפה ב־$\mathbb{R}$.
2. גזירה ב־$\mathbb{R}$.

3. גזירה ברציפות ב־$\mathbb{R}$ (גם גזירה וגם הנגזרת רציפה).

פתרון: נתחיל בחישוב המקרים בהם הפונקציה רציפה.

1. נשים לב כי עבור התחומים $x>0$ ו־ $x<0$ הפונקציה היא פונקציה רציפה לכל a (מצד אחד היא קבועה ושווה לאפס ולכן רציפה, מצד שני היא מכפלה של פונקציות רציפות בתחום $x>0$) לכן נותר לנו לבדוק מתי קיימת רציפות בנקודה $x=0$. הגבול משמאל הוא 0, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ ובנוסף, $f(0)=0$ ולכן כל שנותר לבדוק זה ־ מתי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$.

   (א) אם $a>0$ אזי $\lim_{x\to 0^+} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ כי פונקציה אחת שואפת לאפס ואחרת היא פונקציה חסומה.

   (ב) אם $a=0$ אזי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ וראינו שהגבול הזה לא קיים.

   (ג) אם $a<0$ אזי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{-a}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ונראה כעת שהפונקציה הזאת איננה חסומה בגבול $x=0$. יהי $M>0$ ו־ $\delta>0$ נראה שקיים $0<x<\delta$ כך ש־ $x^a\sin\left(\frac{1}{x}\right)>M$. נבחר את $\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2\pi K$ ובנוסף נדרוש ש־ $x<\min\left\{\delta, M^{\frac{1}{a}}\right\}$.

   למה דווקא הבחירה הזאת? אם $x<\min\left\{\delta, M^{\frac{1}{a}}\right\}$ אזי $x<\delta$ וגם

   $$x<M^{\frac{1}{a}}\Rightarrow x^{-1}>M^{-\frac{1}{a}}\Rightarrow x^a>M.$$

   מאחר ויש אינסוף מספרים שלמים נובע שקיים $K>0$ שלם כך ש־

   $$\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2\pi K>\max\left\{\frac{1}{\delta},\frac{1}{M^{\frac{1}{a}}}\right\}$$

   ולכן נובע ש־

   $$\frac{1}{x^{-a}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=x^a\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi K\right)>M\cdot 1=M,$$

   משמע, הפונקציה לא חסומה ובפרט הגבול אינו 0.
   לכן, הפונקציה רציפה כאשר $a>0$.

2. עבור התחומים $x>0$ ו־ $x<0$ הפונקציה תהיה גזירה מאחר ובחלק החיובי של הציר הממשי היא מכפלה של פונקציות גזירות לכל a, ובחלק השלילי היא קבועה ובפרט גזירה. נבדוק מה קורה בנקודה $x=0$. נחשב את הגבולות החד־צדדיים ונמצא את התנאי כך שהם יהיו שווים זה לזה.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x)^a\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}x^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

בכדי שהגבול השני יהיה שווה לראשון אנחנו צריכים לדרוש ש־ $a > 1$ ואז יש מכפלה של פונקציה חסומה בפונקציה שהולכת ל־0 והגבול יהיה 0.

3. כעת אנחנו מתחילים מהמקרה בו $a > 1$ אחרת הנגדרת לא קיימת על כל הציר הממשי. נציג את הנגזרת בצורה מפורשת.

$$f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^a\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

נשים לב שהפונקציה רציפה בכל $x \neq 0$ מאחר ובצד אחד היא קבועה ובצד שני היא מכפלה, חיסור, חיבור והרכבה של פונקציות רציפות. נבחן את המקרה עבור $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{a-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

נשים לב שהפונקציה הראשונה בגבול שואפת לאפס עבור $a > 1$ והפונקציה השנייה תשאף לאפס עבור $a > 2$ ולכן נדרוש $a > 2$.

תרגיל 3.7 האם הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(x) & x \ge 0 \\ x - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

פתרון: נבדוק על פי הגדרת הנגזרת, את הגבול מימין והגבול משמאל.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sin(x) - (1+\sin(0))}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x - x^2 - (1+\sin(0))}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-x^2-1}{x} \overset{\text{"}\frac{-1}{0^-}\text{"}}{=} \infty$$

לכן הגבול לא קיים והפונקציה איננה גזירה ב־0.

3.2 נגזרת של פונקציה הפוכה

ישנה קבוצה שלמה של פונקציות שנקראות **פונקציות הפיכות**. מה המשמעות של פונקציה הפיכה? ובכן ההגדרה לכך היא יחסית פשוטה. זו צריכה להיות פונקציה כך שניתן לקחת פונקציה אחרת שתהפוך את הפעולה של הראשונה.

הגדרה 3.8 פונקציה f היא פונקציה הפיכה בתחום D, אם קיימת פונקציה g כך ש־

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow f(x) = y \tag{14}$$

לכל $x \in D$.

למעשה, אנחנו אומרים שפונקציה היא הפיכה אם יש לה פונקציה שמחזירה את הערך המקורי x מתוך $f(x)=y$. אם ישנה פונקציה הפוכה אזי נסמן אותה ב־x = $g(y)=f^{-1}(y)=x$.

למה לא כל פונקציה היא הפיכה? ובכן אין ספק שתמיד נוכל להגדיר ביטוי שלוקח את x ונותן את y, הבעיה המרכזית תיווצר כאשר הדבר הזה שנגדיר, לא יהיה פונקציה. זה ייקרה כאשר f איננה חד־חד־ערכית.

דוגמה 3.9 הפונקציה $f(x)=x^2$ איננה הפיכה ב־$\mathbb{R}$ מאחר ומצד אחד $f^{-1}(4)=2$ וגם ייתכן כי $f^{-1}(4)=-2$ כי $f(2)=f(-2)=4$ ואז הפונקציה ההפוכה לא יודעת איזה ערך להחזיר, 2 או -2.

לעומת זאת, עבור $D=[0,\infty)$ הפונקציה כן הפיכה ומתקיים ש־ $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$.

פונקציות הפיכות נוספות שראינו הן $a^x=y$ ו־ $\log_a y=x$.

3.2.1 תכונות של פונקציות הפיכות

ישנן מספר תכונות חשובות של פונקציות הפיכות שצריך לזכור. יהיו $f,\ f^{-1}$ צמד פונקציות הפוכות זו לזו.

1. $f\left(f^{-1}(y)\right)=f(x)=y$.
2. $f^{-1}(f(x))=f(y)=x$.
3. ההופכית של f^{-1} היא - $f=\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}$.

ישנן פונקציות מוכרות שהפיכות רק בתחומים מסויימים. לדוגמא:

- $\sin(x)=y$ הפיכה בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ וההופכית שלה נקראת $\arcsin(y)$.
- $\cos(x)=y$ הפיכה בתחום $0\le x\le\pi$ וההופכית שלה נקראת $\arccos(y)$.
- $\tan(x)=y$ הפיכה בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ וההופכית שלה נקראת $\arctan(y)$.

ניתן לראות את הפונקציות וההופכיות שלהן באיור 14 בעמוד 74.

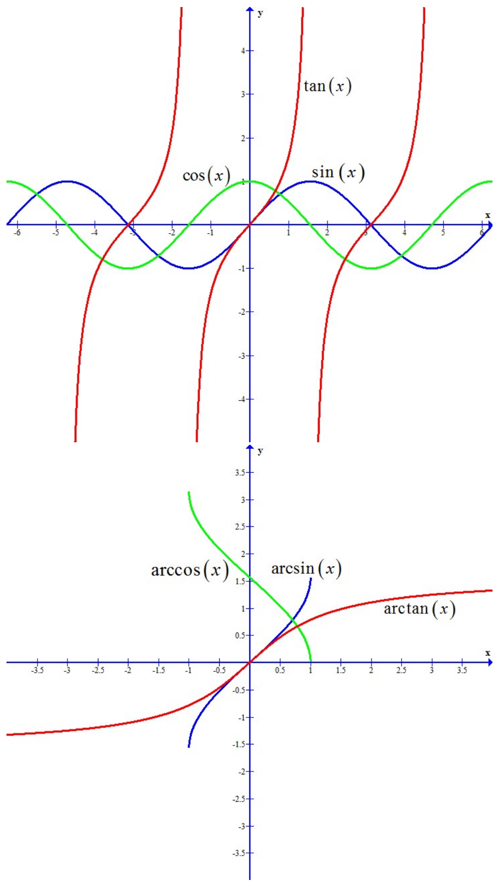
טענה 3.10 אם f פונקציה הפיכה בתחום D ורציפה בנקודה $x_0\in D$, אזי f^{-1} רציפה בנקודה y_0 כאשר $y_0=f(x_0)$.

3.2.2 נגזרת של פונקציה הפיכה

ניתן לגזור פונקציה הפוכה על פי הטענה הבאה.

טענה 3.11 תהי f פונקציה הפיכה בתחום D ונסמן $f(x_0)=y_0$. בנוסף נניח כי f גזירה בנקודה $x_0\in D$ וכן $f'(x_0)\neq 0$. אזי f^{-1} גזירה בנקודה y_0 ומתקיים ש־

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}\ . \tag{15}$$



איור 14: פונקציות טריגונומטריות והפונקציות ההפוכיות שלהן.

<u>נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:</u> בנוסף לפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות, ישנן את הנגזרות של הפונקציות הללו שחשוב להכיר.

- $[\arcsin(y)]' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
- $[\arccos(y)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.
- $[\arctan(y)]' = \frac{1}{1+y^2}$.

נוכיח את הנגזרת הראשונה של ההופכית של $\sin(x)$ ונעשה זאת בשני אופנים.

נתחיל בהוכחה הפורמאלית (ובפועל, ההוכחה ה־"יותר נכונה") ונחשב ישירות את הנגזרת בעזרת טענה 3.11 ובפרט בעזרת משוואה (15).

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x)^2}} \tag{19}$$

כאשר משוואה (16) היא המקרה הפרטי של משוואה (15) עבור סינוס, משוואה (17) מגיעה לאחר הצבת הנגזרת של פונקצית $\sin(x)$, משוואה (18) נובעת מהזהות הטריגונומטרית $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ ולבסוף, משוואה (19) נובעת מההרכבה של פונקציה על הפונקציה ההופכית שלה.

דרך נוספת לראות למה זה נכון היא בעזרת המשוואה

$$\sin(\arcsin(x)) = x \,.$$

נגזור את צמד האגפים (כאשר את אגף שמאל גוזרים בעזרת כלל השרשרת) ונקבל

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin(x))\,[\arcsin(x)]' &= 1\\ [\arcsin(x)]' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\end{aligned}$$

וממשיכים כמו במקרה הקודם לקבל את הנוסחה המתאימה.

תרגיל 3.12 תהי פונקציה $f(x) = x^5+2x^3+x+4$.

1. הוכיחו כי $f'(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
2. ידוע כי f הפיכה ב־ $\mathbb{R}$. חשבו את $x_0 = f^{-1}(0)$.
3. חשבו את $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

פתרון: נחשב את הנגזרת באופן כללי.

$$f'(x) = 5x^4+6x^2+1$$

ונשים לב שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־

$$f'(x) = 5x^4+6x^2+1 \geq 1$$

לכן $f'(x)>0$ בכל נקודה בציר הממשי.

בכדי למצוא את $x_0 = f^{-1}(0)$ נזכור כי

$$x_0 = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(x_0) = 0,$$

לכן אנחנו בפועל צריכים למצוא את x_0 כך ש־ $f(x_0) = 0$, או לחילופין

$$f(x_0) = x_0^5 + 2x_0^3 + x_0 + 4 = 0.$$

במצבים אלו נוכל להשתמש במשפט ערך הביניים ולראות ש־ $f(0) = 4 > 0$ וגם ש־ $f(-2) = -46 < 0$ לכן אנחנו יודעים שישנה נקודה $c \in (-2, 0)$ כך ש־ $f(c) = 0$. נבצע חצייה ראשונה ונקבל

$$f(-1) = -1 + 2 \cdot (-1) - 1 + 4 = 0,$$

לכן קיבלנו ש־ $x_0 = -1 = f^{-1}(0)$.

כעת ישנה בעיה משמעותית יותר והיא ־ מציאת הנגזרת של הפונקציה ההפוכה של f. הבעיה המרכזית היא שאין לנו ביטוי אלגברי להציג את $f^{-1}(y)$, ולכן לא נוכל לבצע גזירה ישירה של הפונקציה ההפוכה. לשם חישוב זה, נשתמש במשוואה (15) מעמוד 73.

$$\begin{aligned}
\left[f^{-1}(0)\right]' &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \\
&= \frac{1}{5x_0^4 + 6x_0^2 + 1} = \frac{1}{5(-1)^4 + 6(-1)^2 + 1} = \\
&= \frac{1}{5 + 6 + 1} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

תרגיל 3.13 תהי פונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$.

1. הוכיחו כי $f'(x) > 0$ לכל $x > 1$.
2. ידוע כי f הפיכה בתחום $(1, \infty)$. חשבו את $x_0 = f^{-1}(0)$.
3. חשבו את $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

פתרון: נחשב את הנגזרת באופן כללי.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot 2x = \\
&= x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = \\
&= x \ln(x)
\end{aligned}$$

כעת, נשים לב ש־ $\ln(x) > 0$ לכל $x > 1$. למה? נניח בשלילה שקיימת נקודה $b > 1$ כך ש־ $\ln(b) < 0$ ובנוסף ידוע ש־ $\ln(e) = 1 > 0$. לכן לפי משפט ערך הביניים , ישנה נקודה c בין e ל־ b כך ש־ $\ln(b) = 0$ (מאחר ו־$\ln$ היא פונקציה רציפה). לפי הגדרת הלוגריתם, קיבלנו ש־

$$1 = e^0 = b > 1,$$

סתירה, ולכן $\ln(x) > 0$ לכל $x > 1$. בנוסף $x > 0$ לכל $x > 1$ על כן $f'(x) > 0$ בתחום $(1,\infty)$בתור מכפלה של 2 פונקציות חיוביות.

נרצה למצוא את הערך של הפונקציה ההופכית בנקודה $y_0 = 0$. לשם כך, נזכור כי

$$x_0 = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(x_0) = 0,$$

לכן אנחנו בפועל צריכים למצוא את x_0 כך ש־ $f(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2\ln(x_0) - \frac{1}{4}x_0^2 \\ 0 &= x_0^2\left(\ln(x_0) - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

ונקבל ש־

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 & = 0 \\ \ln(x_0) - \frac{1}{2} & = 0 \Rightarrow x_0 = e^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad or$$

מאחר ו־ $0 \notin (1,\infty)$ לא בתחום בו אמרנו שהפונקציה הפיכה, אזי $x_0 = e^{\frac{1}{2}}$.

כעת ישנה בעיה משמעותית יותר והיא ־ מציאת הנגזרת של הפונקציה ההפוכה של f. הבעיה המרכזית היא שאין לנו ביטוי אלגברי להציג את $f^{-1}(y)$, ולכן לא נוכל לבצע גזירה ישירה של הפונקציה ההפוכה. לשם חישוב זה, נשתמש במשוואה (15) מעמוד 73.

$$\begin{aligned} \left[f^{-1}(0)\right]' &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \\ &= \frac{1}{x_0\ln(x_0)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}\ln(e)} = 2e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

תרגיל 3.14 מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

- $f(x) = \frac{\cot\left(x^2\right)}{\sqrt{\sin(x)+e^x}}$.
- $f(x) = (\sin(x))^{\sqrt{x}}$.
- $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$.

פתרון: נחשב את הנגזרת לכל פונקציה בנפרד.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\cot\left(x^2\right)}{\sqrt{\sin(x)}+e^x}\right]' &= \left[\frac{\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}}{\sqrt{\sin(x)}+e^x}\right]' = \\
&= \left[\frac{\left[\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}\right]'\cdot\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)-\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}\left((\sin(x))^{\frac{1}{2}}+e^x\right)'}{\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)^2}\right] = \\
&= \frac{\left[\frac{-\sin\left(x^2\right)\sin\left(x^2\right)2x-\cos\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)2x}{\sin\left(x^2\right)}\right]\cdot\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)}{\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)^2} - \\
&- \frac{\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}\left(\frac{1}{2}\sin(x)^{-\frac{1}{2}}(\sin(x))'+e^x\right)}{\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)^2} \\
&= \frac{-2x\left[\frac{\left(\sin\left(x^2\right)\right)^2+\left(\cos\left(x^2\right)\right)^2}{\sin\left(x^2\right)}\right]}{\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)} - \frac{\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)}\left(\frac{1}{2}\sin(x)^{-\frac{1}{2}}\cos(x)+e^x\right)}{\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)^2} \\
&= \frac{-2x}{\sin\left(x^2\right)\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)} - \frac{\cot\left(x^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}+e^x\right)}{\left(\sqrt{\sin(x)}+e^x\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[(\sin(x))^{\sqrt{x}}\right]' &= \left[e^{\ln\left((\sin(x))^{\sqrt{x}}\right)}\right]' = \left[e^{\sqrt{x}\ln(\sin(x))}\right]' = \\
&= e^{\sqrt{x}\ln(\sin(x))}\left[\sqrt{x}\ln(\sin(x))\right]' = \\
&= e^{\sqrt{x}\ln(\sin(x))}\left[\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\ln(\sin(x))+\sqrt{x}\cdot(\ln(\sin(x)))'\right] = \\
&= e^{\sqrt{x}\ln(\sin(x))}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin(x))+\sqrt{x}\frac{1}{\sin(x)}\cdot(\sin(x))'\right] = \\
&= e^{\sqrt{x}\ln(\sin(x))}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin(x))+\sqrt{x}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]' &= \sqrt{a^2-x^2}+x\left[\sqrt{a^2-x^2}\right]'+a^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left(\frac{x}{a}\right)'= \\
&= \sqrt{a^2-x^2}+x\left[\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right]+a^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\frac{1}{a}\right)= \\
&= \sqrt{a^2-x^2}-x^2\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}= \\
&= \sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}= \\
&= \frac{a^2-x^2-x^2+a}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}= \\
&= \frac{2\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{a^2-x^2}
\end{aligned}
$$

3.3 משפטי נגזרות

ישנם מספר משפטים מאוד בסיסיים וחשובים הנוגעים לנגזרות של פונקציות. נסקור אותם בקצרה.

משפט 3.15 (משפט פרמה) תהיי f פונקציה גזירה ב־(a,b)(קטע פתוח). תהיי נקודה $x_0 \in (a,b)$ נקודת מקסימום (או מינימום) של הפונקציה f, אזי $f'(x_0)=0$.

תוצאה זו איננה מפתיעה מאחר והשתמשתם בה עוד בימי התיכון בכדי למצוא נקודות קיצון של פונקציות, אולם חשוב לזכור שהשתמשתם בה בגלל שהמשפט הנ"ל קיים ונכון ולא להיפך. המשפט מוכיח שכל נקודות הקיצון שמצאתם עד כה, הן אכן נקודות קיצון.

המסקנה הישירה ממשפט 3.15 היא שבכדי למצוא נקודות קיצון של פונקציה גזירה בקטע מסויים $[a,b]$, יש לבדוק נקודות קצה ואת הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת בתוך הקטע.

<u>אופן מציאת מקס' בקטע $[a,b]$</u>:

- נפתור את המשוואה $f'(x)=0$ ובכך נמצא נקודות שיהיו חשודות כמקס' לוקאלי.
- עבור כל נקודה $x\in\mathbb{R}$ שמצאנו בסעיף הקודם, נבחן את הערך $f(x)$ ונראה איזה מהם הוא המקסימאלי.
- נשווה עם ערכי $f(a)\,,f(b)$ כדי לראות לקבוע מהי נקודת המקסימום.

משפט 3.16 (משפט רול) אם הפונקציה f רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b) וכן $f(a)=f(b)$, אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־ $f'(c)=0$.

תרגיל 3.17 תהיי פונקציה $f(x)=x^5-3x+\frac{1}{2}$. הראו למשוואה $f(x)=0$ יש פתרון יחיד בקטע $[1,2]$.

פתרון: תחילה נשתמש במשפט ערך הביניים להראות שיש לפחות פתרון אחד בקטע זה. נשים לב ש־ $f(2)=26\frac{1}{2}$ ובנוסף $f(1)=-\frac{3}{2}$ ולכן לפי משפט ערך הביניים, בשילוב העובדה שהפונקציה רציפה, נובע שקיימת נקודה $c_1\in(1,2)$ כך ש־ $f(c_1)=0$. כעת נניח בשלילה שקיימת עוד נקודה $c_2\neq c_1$, $c_2\in(1,2)$ כך ש־ $f(c_2)=0$. נשים לב שהפונקציה עומדת בתנאים של משפט 3.16 בקטע שבין c_1 ו־c_2 מאחר והפונקציה גזירה בקטע זה ובנוסף $f(c_1)=f(c_2)=0$. לכן לפי משפט פרמה נובע שקיימת נקודה c בין c_1 ל־ c_2 כך ש־ $f'(c)=0$.

$$f'(x)=5x^4-3>5-3=2,\quad \forall x>1$$

ומאחר ו־$c\in(1,2)$ אנחנו נקבל ש־ $f'(c)>2$ סתירה. לכן ישנו פתרון יחיד למשוואה בקטע $(1,2)$.

משפט חשוב אחרון שנראה בשלב זה הוא משפט לגראנג' אשר התוצאה שלו איננה כל כך אינטואיטיבית או מובנת מעליה.

משפט 3.18 (משפט לגראנג') תהיי f פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b), אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־ $f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

תרגיל 3.19 תהיי פונקציה

$$.f(x)=\begin{cases}x^2+4 & -2\le x\le 0\\ 4+x(x-4) & 0<x\le 5\end{cases}$$

מצאו נקודות מקסימום ומינימום מוחלט של הפונקציה.

פתרון: נתחיל בניתוח הפונקציה מבחינת רציפות וגזירות בקטע $[-2,5]$. נשים לב שבכל אזור בפני עצמו, $[-2,0)$, $(0,5]$ הפונקציה רציפה וגזירה בתור פולינום ולכן נותר לנו לבדוק מה קורה בנקודה $x=0$.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x^2+4=4$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}4+x(x-4)=4$$

ולכן הפונקציה רציפה ב־$x=0$. נבדוק גזירות ב־ $x=0$ ונקבל,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{4+x(x-4)-4}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-4)}{x}=-4$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+4-4}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x}=0$$

ולכן קיבלנו שהפונקציה לא גזירה ב־$x=0$. לכן ננתח כל קטע בנפרד. נרשום את הנגזרת של הפונקציה בצורה מפורשת.

$$.f'(x)=\begin{cases}2x & -2<x<0\\ 2x-4 & 0<x<5\end{cases}$$

והנקודות החשודות שנקבל מהמשוואה $f'(x)=0$ הן $x=0,\ x=2$. נחשב את הערכים החשובים בקצוות הקטעים ובנקודה החשודה ונקבל:

$$f(x)=\begin{cases}8 & x=-2\\ 4 & x=0\\ 0 & x=2\\ 9 & x=5\end{cases}.$$

לסיכום, קיבלנו ש־ $x=2$ נקודת מינימום כך ש־ $f(2)=0$ ו־$x=5$ נקודת מקסימום כך ש־ $f(5)=9$.

תרגיל 3.20 מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה

$$f(x) = 2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}},\quad x\in\left[-\frac{1}{8},2\right].$$

פתרון: נשים לב שהפונקציה רציפה בקטע ולכן לפי משפט ויירשטראס (משפט 2.78) יש לה נקודות מינימום ומקסימום בקטע. נחשב את הנקודות הקריטיות בקטע ונקבל

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0\\ \Rightarrow\ x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}} &=0\\ \tfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}} &=0\end{aligned}$$

ולכן הנגזרת מתאפסת אם ורק אם $x=1$ ובנוסף נשים לב שהנגזרת לא קיימת עבור $x=0$. לכן נבחן את ערכי הפונקציה בנקודות $x=-\frac{1}{8},0,1,2$.

$$f(x)=\begin{cases}2\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}}-5\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=-2\cdot\frac{1}{32}-5\cdot\frac{1}{4}=-\frac{21}{16} & x=-\frac{1}{8}\\ 0 & x=0\\ -3 & x=1\\ 2\,(2)^{\frac{5}{3}}-5\,(2)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\,(4-5)=-\,(4)^{\frac{1}{3}} & x=2\end{cases}$$

לכן נקבל שישנה נקודת מינימום ב־ $x=1$ ונקודת מקסימום ב־ $x=0$.

תרגיל 3.21 הוכיחו כי למשוואה $x^2+x\cos(x)=1+\sin(x)$ יש בדיוק 2 פתרונות.

פתרון: נתחיל בהגדרת פונקצית עזר

$$f(x)=x^2+x\cos(x)-1-\sin(x).$$

נשתמש במשפט ערך הביניים (משפט 2.72) בכדי להראות שיש לפחות 2 פתרונות למשוואה $f(x)=0$. נשים לב ש־

$$f(0)=-1<\quad 0<\quad f(10)$$

וגם

$$, f\left(0\right)=-1<\quad 0<\quad f\left(-10\right)$$

לכן ישנן נקודות $x_2\in\left(0,10\right)$ ו־$x_1\in\left(-10,0\right)$ כך ש־ $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$. נניח בשלילה שקיימת נקודה נוספת $x_3\neq x_1,x_2$ בקטע $\left[-10,10\right]$ כך ש־ $f\left(x_3\right)=0$. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $x_1<x_2<x_3$ ולפי משפט 3.16 נובע שקיימות נקודות $c_1\in\left(x_1,x_2\right)$ ו־ $c_2\in\left(x_2,x_3\right)$, $c_1\neq c_2$, כך ש־ $f'\left(c_2\right)=f'\left(c_1\right)=0$ (חשוב לציין שהפונקציה גזירה בכל הציר הממשי ולכן משפט רול תקף). אבל, יחד עם זאת, נקבל ש־

$$\begin{aligned}
f'\left(x\right) &= \left[x^2+x\cos\left(x\right)-1-\sin\left(x\right)\right]'= \\
&= 2x+\cos\left(x\right)-x\sin\left(x\right)-\cos\left(x\right)= \\
&= 2x-x\sin\left(x\right) \\
&= x\left(2-\sin\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

ואנחנו רואים ש־ $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ובפרט $c_1=c_2$ סתירה. לכן למשוואה ישנם בדיוק 2 פתרונות.

תרגיל 3.22 תהיי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־ $\left[a,b\right]$ וגזירה פעמיים בקטע $\left(a,b\right)$ ונתון כי $f''\left(x\right)\neq 0$ לכל x. הוכיחו כי f מקבלת כל ערך לכל היותר פעמיים.

פתרון: נניח בשלילה ש־f מקבלת אותו ערך 3 פעמים, לכן ישנן $a\leq x_1<x_2<x_3\leq b$ כך ש־ $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)$. מאחר והפונקציה רציפה וגזירה, אזי לפי משפט 3.16 נובע שקיימות 2 נקודות $c_1\in\left(x_1,x_2\right)$ ו־ $c_2\in\left(x_2,x_3\right)$ כך ש־ $f'\left(c_1\right)=f'\left(c_2\right)=0$. כעת נבחן את הפונקציה $f'\left(x\right)$. מהנתון שהפונקציה המקורית גזירה פעמיים, נובע ש־ $f'\left(x\right)$ היא פונקציה גזירה. נזכור כי כל פונקציה גזירה היא בפרט רציפה ולכן נובע ש־ $f'\left(x\right)$ מקיימת את תנאי משפט רול בקטע $\left(c_1,c_2\right)$ ולכן נובע שקיימת נקודה $d\in\left(c_1,c_2\right)$ כך ש־ $f''\left(d\right)=0$ אבל זה סותר את הנתון ש־ $f''\left(x\right)\neq 0$ לכל x. סתירה.

תרגיל 3.23 תהיי פונקציה f רציפה בקטע $\left[1,4\right]$ וגזירה ב־$\left(1,4\right)$. נתון כי $f\left(1\right)=2$ ובנוסף $f'\left(x\right)>2$ לכל $x\in\left(1,4\right)$. הוכיחו כי $f\left(4\right)>8$.

פתרון: נניח בשלילה ש־ $f\left(4\right)\leq 8$. נשים לב כי

$$\frac{f\left(4\right)-f\left(1\right)}{4-1}\quad\leq\quad\frac{8-2}{3}=2$$

ולפי משפט לגראנג' (משפט 3.18) קיימת נקודה $c\in\left(1,4\right)$ כך ש־ $f'\left(c\right)\leq 2$ מה שסותר את הנתון ש־$f'\left(x\right)>2$ לכל $x\in\left(1,4\right)$.

תרגיל 3.24 הוכיחו את אי שוויון ברנולי. לכל $n\geq 0$ מספר טבעי ולכל $x>-1$ מתקיים

$$.\left(1+x\right)^n\geq 1+nx$$

פתרון: נשים לב תחילה שעבור $n=1,\ n=0$ ההוכחה היא טריוויאלית וישנו שיוויון בין האגפים לכל $x>-1$.

$$n=0 \ \Rightarrow \ (1+x)^0=1= \ \ 1+0\cdot x,$$

$$n=1 \ \Rightarrow \ (1+x)^1=1+x= \ \ 1+1\cdot x.$$

לכן נניח כי $n\geq 2$ טבעי, באופן דומה, קל לראות שהאי־שוויון נכון עבור $x=0$ ולכן נניח ש־ $x\neq 0$. נגדיר פונקציה $f(x)=(1+x)^n$ ומאחר ומדובר בפולינום ממעלה n אזי הפונקציה רציפה וגזירה. נפצל לשני מצבים, $x>0$ ו־$-1<x<0$.

- אם $x>0$: נשתמש במשפט לגראנג' עבור הקטע $(0,x)$. לפי המשפט נובע שקיימת נקודה $c\in(0,x)$ כך ש־

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= f'(c)\\
\frac{(1+x)^n-(1+0)^n}{x} &= n(1+c)^{n-1}\\
\frac{(1+x)^n-1}{x} &= n(1+c)^{n-1}>n\cdot 1=n\\
(1+x)^n &> nx+1
\end{aligned}$$

כנדרש, כאשר המעבר השלישי נכון מאחר ו־ $c>0$ ולכן $(1+c)^{n-1}>1$.

- אם $-1<x<0$: נשתמש במשפט לגראנג' עבור הקטע $(-1,x)$. לפי המשפט נובע שקיימת נקודה $c\in(-1,x)$ כך ש־

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= f'(c)\\
\frac{(1+x)^n-(1+0)^n}{x} &= n(1+c)^{n-1}\\
\frac{(1+x)^n-1}{x} &= n(1+c)^{n-1}<n\\
(1+x)^n &> nx+1
\end{aligned}$$

כנדרש, כאשר המעבר השלישי נכון מאחר ו־ $c<0$ ולכן $(1+c)^{n-1}<1$, והמעבר האחרון נכון מאחר ו־ $x<0$ והסימן של האי־שוויון מתהפך.

תרגיל 3.25 הוכיחו כי $\ln(1+x)<x$ לכל $x>0$.

פתרון: נגדיר פונקציה $f(x)=\ln(1+x)$ רציפה ב־ $[0,x]$ וגזירה בתחום $x>0$. יהי $x>0$ ונסתכל על הקטע $(0,x)$. נשתמש במשפט לגראנג' עבור הפונקציה שהגדרנו וקטע

זה. קיימת נקודה $c\in(0,x)$ כך ש־

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= f'(c)\\ \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x} &= \frac{1}{1+c}\\ \ln(1+x) &= \frac{x}{1+c}<x\end{aligned}$$

והמעבר האחרון נכון מאחר ו־$c>0$ ולכן $\frac{1}{1+c}<1$.

תרגיל 3.26 הוכיחו כי $e^x>x+1$ לכל $x>0$.

פתרון: נגדיר פונקציה $f(x)=e^x$ רציפה וגזירה בכל $x\in\mathbb{R}$. יהי $x>0$ ונסתכל על הקטע $(0,x)$. נשתמש במשפט לגראנג' עבור הפונקציה שהגדרנו וקטע זה. לפי משפט 3.18 קיימת נקודה $c\in(0,x)$ כך ש־

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= f'(c)\\ \frac{e^x-e^0}{x} &= e^c\\ e^x-1 = x\cdot e^c &> x\\ e^x &> x+1\end{aligned}$$

והמעבר השלישי נכון מאחר ו־$c>0$ ולכן $e^c>1$.

משפט נוסף שהוא למעשה הכללה של משפט לגראנג', זה משפט קושי.

משפט 3.27 (משפט קושי) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) ונתון כי $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

שימו לב כי עבור $g(x)=x$ אנחנו מקבלים את משפט לגראנג' ולכן משפט קושי הוא למעשה הכללה שלו.

3.4 מונוטוניות של פונקציות

לפונקציות לרוב ישנה תכונה הנקראת המונוטוניות בתחומים שונים. למעשה מדובר, בתחומי עלייה וירידה של פונקציות שראינו בעבר. פונקציות רציפות וגזירות קל לנתח מבחינת תחומי עלייה וירידה מאחר ובאזורים אלו ישנו קשר ישיר בין הסימן של הנגזרת (השיפוע בנקודות השונות) לבין עלייה וירידה של פונקציות.

הגדרה 3.28 פונקציה f היא מונוטונית עולה בקטע (a,b) אם לכל $x<y$ בקטע מתקיים ש־ $f(x)\leq f(y)$. (נאמר שהפונקציה עולה ממש, אם האי־שוויון האחרון הוא אי־שוויון חזק, קרי $f(x)<f(y)$).

באופן דומה ישנה הגדרה לפונקציה מונוטונית יורדת, כאשר f היא מונוטונית יורדת בקטע (a,b) אם לכל $x<y$ בקטע מתקיים ש־ $f(x)\geq f(y)$.

טענה 3.29 תהי f פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b). אם $f'(x)\geq 0$ בכל נקודה $x\in(a,b)$ אזי f היא מונוטונית עולה בקטע (a,b).

במידה הנגזרת היא שלילית בקטע אזי, הפונקציה f תהיה מונוטונית יורדת.

טענה 3.30 תהי f פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b). אם $f'(x)=0$ בכל נקודה $x\in(a,b)$ אזי f היא קבועה בקטע (a,b).

תרגיל 3.31 תהי פונקציה f רציפה בקטע $[0,\infty)$ וכן נתון ש־ $f(0)=100$ ו־

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2\,.$$

הוכיחו כי f חסומה ב־$[0,\infty)$.

פתרון: יהי $\epsilon=1$. מהגדרת הגבול באינסוף נובע שקיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים ש־ $1=2-\epsilon<f(x)<2+\epsilon=3$ לכן בקטע (M,∞) הפונקציה חסומה. כעת נסתכל על הקטע $[0,M]$, הפונקציה רציפה בקטע זה ולכן לפי משפט ויירשטראס קיימים לה נקודות מקסימום ומינימום בקטע. נסמן את הערך המקסימאלי שהיא מחזירה ב־ $\overline{L}$ והערך המינימאלי ב־ $\underline{L}$. לכן קיבלנו ש־

$$\min\left\{\underline{L},1\right\}\leq f(x)\leq\max\left\{\overline{L},3\right\},$$

והפונקציה חסומה.

תרגיל 3.32 תהי פונקציה $f(x)=x\arctan(x)$.

1. הראו כי $f''(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
2. הראו כי לכל $a<b$ מתקיים ש־

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{a}{1+a^2}\leq\frac{b\cdot\arctan(b)-a\cdot\arctan(a)}{b-a}\leq\frac{\pi}{2}+\frac{b}{1+b^2}\,.$$

פתרון: נגזור את הפונקציה פעמיים ונקבל ש־

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \arctan(x) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
f''(x) &= \left[\arctan(x) + x\left(1+x^2\right)^{-1}\right]' = \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \left(1+x^2\right)^{-1} - x \cdot \left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2x \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2\left(1+x^2\right)}{(1+x^2)^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0
\end{aligned}
$$

נשים לב כי לפי החישוב הנ"ל נובע כי $f'(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה בקטע (a,b) (הנגזרת של הנגזרת חיובית ולכן הנגזרת עצמה היא פונקציה מונוטונית עולה). בנוסף, לפי משפט לגראנג' נובע שקיים $c \in (a,b)$ כך ש־

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$.\frac{b\cdot\arctan(b) - a\cdot\arctan(a)}{b-a} = f'(c)$$

מאחר והנגזרת היא פונקציה מונוטונית עולה נובע שלכל $a < c < b$ מתקיים ש־

$$,f'(a) \le f'(c) \le f'(b)$$

לכן נציב ונקבל

$$
\begin{aligned}
f'(a) \le & \quad \tfrac{b\cdot\arctan(b)-a\cdot\arctan(a)}{b-a} \quad \le f'(b) \\
\arctan(a) + a\cdot\frac{1}{1+a^2} \le & \quad \tfrac{b\cdot\arctan(b)-a\cdot\arctan(a)}{b-a} \quad \le \arctan(b) + b\cdot\frac{1}{1+b^2}
\end{aligned}
$$

ומאחר ו־ $-\frac{\pi}{2} \le \arctan(x) \le \frac{\pi}{2}$ נובע ש־

$$-\frac{\pi}{2} + a\cdot\frac{1}{1+a^2} \le \quad \tfrac{b\cdot\arctan(b)-a\cdot\arctan(a)}{b-a} \quad \le \frac{\pi}{2} + b\cdot\frac{1}{1+b^2}$$

כנדרש.

תרגיל 3.33 הוכיחו כי לכל $x \in [-1,1]$ מתקיים ש־

$$.\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

פתרון: נגדיר פונקציית עזר $f\left(x\right)=\arcsin\left(x\right)+\arccos\left(x\right)$ ונשים לב שהפונקציה גזירה בקטע $\left(-1,1\right)$ ורציפה בקטע $\left[-1,1\right]$. נחשב את הנגזרת של f ונקבל

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}}=0\,,$$

ולכן נובע שהפונקציה היא פונקציה קבועה. נחשב את הערך שלה בנקודה $x=0$,

$$f\left(0\right)=\arcsin\left(0\right)+\arccos\left(0\right)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

תרגיל 3.34 חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\cos(x)}$.

פתרון: אנחנו מזהים שיש לנו גבול אשר מאוד דומה לגבול של אקספוננט, אבל פונקציית הקוסינוס בחזקה תפריע לחישובים שלנו. לכן נצטרך למצוא דרך "להיפטר" ממנה. במצבים כאלה מומלץ להשתמש בכלל הסנדביץ' ובנוסף להיעזר בתכונת המונוטוניות. נשים לב ש־ $-1\leq\cos\left(x\right)\leq1$ ולכן

$$x-1\leq x+\cos\left(x\right)\leq x+1.$$

בנוסף, נשים לב שהפונקציה $f\left(x\right)=a^{x}$ עבור $a>1$ היא פונקציה מונוטונית עולה מאחר ו־ $f'\left(x\right)=a^{x}\ln a>0$, לכן נקבל ש־

$$a^{x-1}\leq a^{x+\cos(x)}\leq a^{x+1}.$$

נגדיר $a=1+\frac{1}{x}>0$ לכל $x>0$ ונקבל

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-1}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\cos(x)}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

לפי כלל הסנדביץ' נובע שאם

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1}=e\cdot1=e\\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1}}=\frac{e}{1}=e\end{aligned}$$

אזי,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\cos(x)} = e.$$

טענה 3.35 יהיו f,g פונקציות גזירות ב־ $\left[a,\infty\right)$ ונתון ש־ $f\left(a\right)\geq g\left(a\right)$ ו־ $f'\left(x\right)>g'\left(x\right)$ לכל $x\in\left[a,\infty\right)$. אזי, $f\left(x\right)>g\left(x\right)$ לכל $x>a$.

הוכחה: נגדיר פונקציה חדשה $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$. נשים לב ש־ $h\left(a\right)\geq0$ ובנוסף מתקיים ש־ $h'\left(x\right)>0$ לכל $x>a$. לכן הפונקציה $h\left(x\right)$ היא מונוטונית עולה ממש בקטע $\left(a,\infty\right)$. מכאן נובע ש־ $h\left(x\right)>h\left(a\right)\geq0$ ואם נציב חזרה את הפונקציות המקוריות נקבל ש־ $f\left(x\right)-g\left(x\right)>0$ לכל $x>a$, כנדרש. ■

3.5 כלל לופיטל

כלל לופיטל הוא כלל מאוד בסיסי המאפשר חישוב מהיר של גבול של מנה של פונקציות בעזרת הנגזרות שלהן.

טענה 3.36 (כלל לופיטל) יהיו 2 פונקציות f,g גזירות בסביבה מנוקבת של $\square$ ($g(x), g'(x) \neq 0$ בסביבה זו) וכן נתון כי

$$\lim_{x\to\square} f(x) = \lim_{x\to\square} g(x) = \triangle$$

כאשר $\triangle = 0 \ or \ \infty$ ו־$\square$ הוא ערך כלשהו (סופי או אינסופי), וגם נתון כי

$$\lim_{x\to\square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

אזי,

$$\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

תרגיל 3.37 חשבו את הגבולות הבאים:

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)=?$.
- $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=?$.
- $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}=?$.
- $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x}}{x}=?$.
- $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=?$.
- $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}{\sin^4(x)}=?$.

פתרון: נחשב כל סעיף בנפרד.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) &= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}\right) \overset{``\frac{0}{0}"}{=} \\
&= \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}\right) \overset{``\frac{0}{0}"}{=} \\
&= \lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}\right) = \\
&= \frac{-0}{1+1-0} = 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{1}=2.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos(x)}=\frac{1+1}{1}=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x}}{x}\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x}\ln(2)}{1}=\infty.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} &\overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to0}\frac{2x\left(e^{x^2}-1\right)}{4x^3}=\\ &= \lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{2x^2}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\\ &\underset{t=x^2}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{e^{t}-1}{t}=\\ &= \frac{1}{2}\ln(e)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

את הגבול הבא ניתן לחשב ישירות בעזרת כלל לופיטל אבל הנגזרת הולכת ומסתבכות (בייחוד במכנה) ולכן נמצא דרך יותר קל לחשב אותו.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}{\sin^4(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}{x^4}\cdot\frac{x^4}{\sin^4(x)}$$

אנחנו יודעים לחשב את הגבול של הביטוי השני ולכן נתרכז רק בביטוי הראשון כעת.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}{x^4} &\overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1-x}+1+x+x^2}{4x^3}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1-x)^2}+1+2x}{12x^2}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{(1-x)^3}+2}{24x}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{6}{(1-x)^3}}{24}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}{\sin^4(x)} &= \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}{x^4}\cdot\frac{x^4}{\sin^4(x)}=\\ &= -\frac{1}{4}\cdot1=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

תרגיל 3.38 לכל $a \in \mathbb{R}$, חשב את הגבולות הבאים:

- $\lim_{x\to\infty} x^{x^{-a}} = ?$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = ?$.

פתרון: עבור המקרה בו $a = 0$ ניתן לבצע חישוב ישיר והגבול יהיה

$$\lim_{x\to\infty} x^{x^{-a}} = \lim_{x\to\infty} x^1 = \infty .$$

במקרה בו $a < 0$ נקבל ש־

$$\lim_{x\to\infty} x^{x^{-a}} \underset{x^{-a}>1}{>} \lim_{x\to\infty} x^1 = \infty .$$

לכן נותר לנו לחשב את המקרה בו $a > 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{x^{-a}} &= \lim_{x\to\infty} e^{x^{-a}\ln(x)} = \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x^a}}\end{aligned}$$

יש לנו מצב של "$\frac{\infty}{\infty}$" ולכן נשתמש בכלל לופיטל,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^a} = 0\end{aligned}$$

לכן,

$$\lim_{x\to\infty} x^{x^{-a}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x^a}} = e^0 = 1 .$$

<u>סעיף ב'</u>: עבור המקרה בו $a = 0$ נקבל את הגבול הבא,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^0} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty .$$

כאשר $a < 0$ נקבל את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} x^{-a}e^x = \lim_{x\to\infty} x^{|a|}e^x \overset{\text{"}\infty\cdot\infty\text{"}}{=} \infty .$$

לכן נותר לנו לחשב את המצב בו $a > 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} &\underset{t=e^x}{\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{(\ln(t))^a} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t^{\frac{1}{a}}}{(\ln(t))}\right]^a\end{aligned}$$

נחשב את הביטוי שקיבלנו בנפרד.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\frac{1}{a}}}{(\ln(t))} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{a}t^{\frac{1}{a}-1}}{\frac{1}{t}} = \\ = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{a}t^{\frac{1}{a}} = \infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^a} \underset{t=e^x}{=} \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{\frac{1}{a}}}{(\ln(t))}\right]^a = \infty .$$

תרגיל 3.39 חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+e)^x - e^x}{x^2} =? .$$

פתרון: נשים לב כי המכנה שואף ל־0 אבל במונה יש לנו פונקציה הרבה יותר בעייתית. נחשב את הגבול הבא בעזרת כלל הסנדביץ'.

$$\lim_{x\to 0}\ (x+e)^x \ =? .$$

מאחר ו־$x\to 0$ אזי קיימת סביבה של 0 כך ש־

$$2^x \ < x+e < \ 3^x$$

ולכן לפי כלל הסנדביץ' נובע ש־

$$\lim_{x\to 0}\ (x+e)^x \ = 1 .$$

לכן נוכל להשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+e)^x - e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x+e)} - e^x}{x^2} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x+e)}\cdot\left[\ln(x+e)+\frac{x}{x+e}\right] - e^x}{2x}$$

נשים לב כי $\lim_{x\to 0}\ln(x+e)+\frac{x}{x+e} = 1+0 = 1$ ולכן שוב נוכל להשתמש בכלל לופיטל ולקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+e)^x - e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x+e)}\cdot\left[\ln(x+e)+\frac{x}{x+e}\right] - e^x}{2x} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x+e)}\cdot\left[\ln(x+e)+\frac{x}{x+e}\right]^2 + e^{x\ln(x+e)}\left[\frac{1}{x+e}+\frac{x+e-x}{(x+e)^2}\right] - e^x}{2} = \\ = \frac{1\cdot[1+0]^2 + 1\left[\frac{1}{e}+\frac{e}{e^2}\right] - 1}{2} = \frac{\frac{2}{e}}{2} = \frac{1}{e}$$

4 חקירת פונקציות

לאחר שלמדנו על כל המאפיינים של פונקציות ורכשנו מספר רב של כלים בכדי להבין פונקציות אנחנו יכולים לעבור לשלב המסכם ־ חקירת פונקציות. אנחנו הולכים להשתמש בכל הכלים שעמודים לרשותנו בכדי להבין איך פונקציות מסובכות נראות ומתנהגות באיזורים שונים בתחום ההגדרה הטבעי שלהן. לשם כך, נתחיל בתרגול תחומי עלייה וירידה של פונקציות.

נזכור כי כבר במשפט פרמה ראינו שאם פונקציה היא גזירה ובנוסף x_0 היא נקודת קיצון, אזי $f'(x_0)=0$. ובנוסף, למדנו שהנגזרת מעידה על תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, כאשר הפונקציה גזירה. זאת אומרת שכאשר הנגזרת חיובית, אזי הפונקציה עולה וכאשר הנגזרת שלילית, הפונקציה יורדת.

4.1 קמירות וקעירות של פונקציות

הגדרה 4.1 הפונקציה f קמורה בקטע (a,b) אם $f''(x)$ קיימת ובנוסף $f''(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$. הפונקציה f קעורה בקטע (a,b) אם $f''(x)$ קיימת ובנוסף $f''(x)\leq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

קל לראות שניסוח שקול להגדרה 4.1 היא שפונקציה f היא קמורה אם $f''(x)$ קיימת ובנוסף $f'(x)$ היא פונקציה עולה לכל $x\in(a,b)$.

הגדרה 4.2 הנקודה x_0 היא נקודת פיתול אם הפונקציה f הופכת מקמורה לקעורה בנקודה x_0 (או להיפך). ז"א, נקודת פיתול היא נקודה בה הנגזרת השנייה משנה סימן (הופכת מחיובית לשלילית או להיפך).

באיור 15ניתן לראות שפונקציה קעורה היא בעלת צורה של "קערה הפוכה" ופונקציה קמורה היא דווקא עם צורת "קערה" (אין לי מושג למה הפכו את השמות בצורה כזאת...). שימו לב שניתן לראות שאיור בנוסף שנקודת פיתול איננה בהכרח נקודה בה הנגזרת מתאפסת ובנוסף, העובדה שפונקציה היא קמורה או קעורה, אין הדבר אומר שיש לה נקודות קיצון (לדוגמא, פונקצית $\ln(x)$ היא פונקציה קעורה ללא נקודת קיצון).

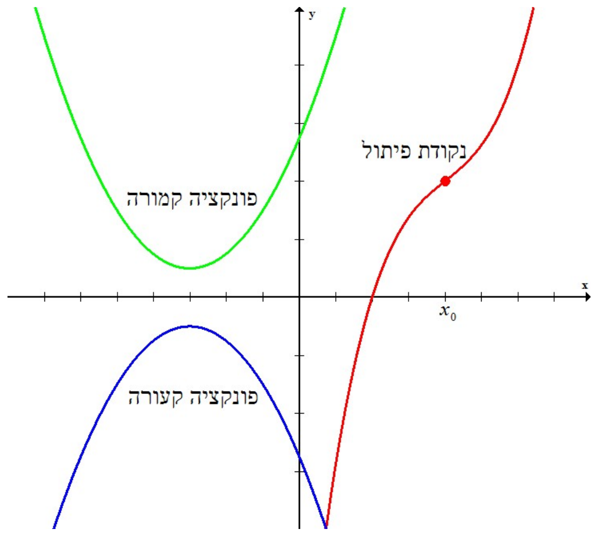
שימו לב כי הגדרנו את הקמירות וקעירות רק תחת התנאי שהנגזרת השנייה קיימת, ולכן במצבים בהם אין נגזרת שנייה, לא נוכל לקבוע תחומים אלו.

4.2 אסימפטוטות

ישנן מספר סוגי אסימפטוטות בהן נעסוק ־ אסימפטוטה אופקית, אסימפטוטה אנכית ואסימפטוטה משופעת.

הגדרה 4.3 תהי פונקציה f המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0. נאמר שלפונקציה ישנה אסימפטוטה אנכית בנקודה x_0 אם לפחות אחד מהגבולות $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ הוא אינסופי.

האסימפטוטה עצמה היא למעשה הקו האנכי $x=x_0$. באופן דומה נגדיר אסימפטוטה אופקית לפונקציה f.



איור 15: פונקציה קמורה, קעורה ונקודת פיתול

הגדרה 4.4 תהי f פונקציה. נאמר כי הישר $y=b$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ או $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$.

אסימפטוטה שלישית בה נעסוק היא אסימפטוטה משופעת מהצורה $y=ax+b$. אסימפטוטה זו דומה לאסימפטוטות הקודמות והיא מהווה למעשה שילוב של השתיים.

הגדרה 4.5 נאמר כי הישר $y=ax+b$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה f אם $\lim_{x\to\infty}(f(x)-y)=0$ או $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$.

זאת אומרת שהישר $y=ax+b$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה f אם המרחק בינהם שואף ל־0 כאשר $x\to\infty$ או $x\to-\infty$.

בעוד הדרכים למציאת אסימפטוטות אנכיות ואופקיות הן די ברורות ופשוטות, מציאת אסימפטוטות משופעות מצריך עבודה מעט יותר קשה. בעזרת אריתמטיקה של גבולות נוכל להגיע לנוסחאות הבאות למציאת a,b עבור אסימפטוטה משופעת $y=ax+b$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax). \end{aligned}$$

תרגיל 4.6 תהי פונקציה $f(x)$ ונתון שיש לה אסימפטוטה משופעת $y=ax+b$ כאשר $x\to\infty$ ו־ $a\neq 0$. הוכיחו כי

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax). \end{aligned}$$

פתרון: נתחיל בהוכחת הנוסחה הראשונה.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b+ax+b}{x}=\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}+\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}=\\ &= a+\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}+\frac{b}{x}=\\ & a+0+0=a\end{aligned}$$

שימו לב שהביטוי האחרון שקיבלנו כלל גבול בו המונה שאף ל־0 והמכנה לאינסוף ולכן כל הגבול שווה ל־0. נחשב את הגבול השני הנדרש בשאלה.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax+b-b)=\\ &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax+b)-b=\\ &= 0+b=b\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 4.7 מצאו עבור אילו ערכי a הפונקציה $f(x)=x^a$ היא קמורה או קעורה בקטע $(0,\infty)$.

פתרון: נתחיל בחישוב עבור הערך הקל של a והוא 0. כאשר $a=0$ אזי $f(x)=1$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן הפונקציה היא פונקציה קבועה. הנגזרת השנייה של הפונקציה היא כמובן 0 ובפרט הפונקציה היא גם קמורה וגם קעורה לכל x בתחום ההגדרה שלה. נחשב את הנגזרות של הפונקציה עבור כל ערך של a,

$$\begin{aligned}f'(x) &= ax^{a-1}\\ f''(x) &= a(a-1)x^{a-2}.\end{aligned}$$

ניתן לראות שהנגזרת השנייה של הפונקציה מוגדרת תמיד בתחום $(0,\infty)$ ולכן הפונקציה גזירה פעמיים בתחום זה. נבחן את הסימן של הנגזרת השנייה ונקבל ש־ $f''(x)\geq 0$ אם ורק אם $a(a-1)\geq 0$ מאחר ו־$x^{a-2}>0$ לכל $x>0$. השוויון

$$a(a-1)=0$$

מתקיים כאשר $a=0$ או $a=1$ ולכן האי־שוויון $a(a-1)\geq 0$ מתקיים כאשר $a\geq 1$ או $a\leq 0$. על כן נוכל להסיק כי כאשר $a\geq 1$ או $a\leq 0$ הפונקציה היא קמורה וכאשר $0\leq a\leq 1$ הפונקציה היא קעורה. נשים לב שכאשר $a=0,1$ אזי הפונקציה היא קו ישר ובפרט היא קמורה וקעורה בו־זמנית.

4.3 חקירת פונקציות

נעבור לשלב חקירת הפונקציות. במהלך חקירת פונקציות נחקור את הנקודות הבאות בכל פונקציה:

1. תחום הגדרה טבעי.
2. נקודות חיתוך עם הצירים.
3. תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון.
4. תחומי קמירות, קעירות ונקודות פיתול.
5. אסימפטוטות - אנכיות, אופקיות ומשופעות.

תרגיל 4.8 חקרו את הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+3.$$

פתרון: נשים לב שמדובר בפולינום ולכן הוא מוגדר לכל $x\in\mathbb{R}$. מבחינת נקודות חיתוך עם הצירים, נשים לב שיש את הנקודה $(0,3)$, ובכדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר x נצטרך להשתמש בשיטת החצייה (לטובת התרגיל הנוכחי, כרגע נדלג על שלב זה). נחשב את הנגזרות של הפולינום ונקבל,

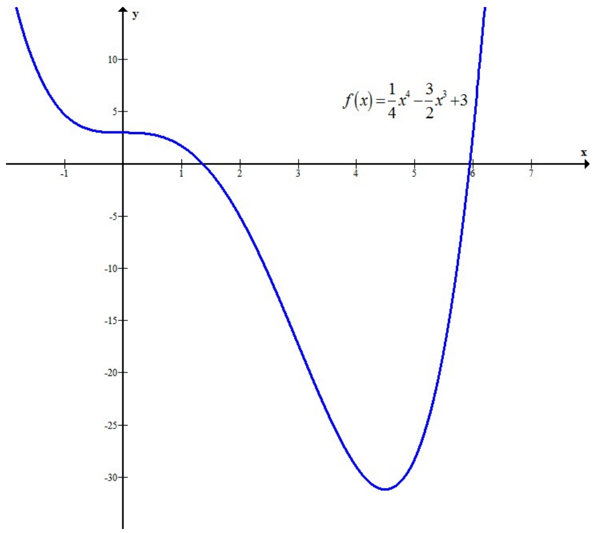
$$\begin{aligned} f'(x)&=x^3-\frac{9}{2}x^2\\ f''(x)&=3x^2-9x. \end{aligned}$$

נשווה את הנגזרת הראשונה ל־0 בכדי למצוא נקודות קיצון.

$$\begin{aligned} f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2&=0\\ x^2\left(x-\frac{9}{2}\right)&=0\\ x_{1,2}&=0,\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

כאשר $x<\frac{9}{2}$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת. כאשר $x>\frac{9}{2}$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקצה עולה. נסכם זאת בטבלה.

תחומי עלייה וירידה	יורדת	?	יורדת	נקודת מינימום	עולה
$f'(x)$	-	0	-	0	+
x	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{9}{2}$	$x=\frac{9}{2}$	$x>\frac{9}{2}$



איור 16: חקירת פונקציה (תרגיל 4.8)

נבחן כעת את תחומי קמירות, קעירות ונקודות פיתול. לשם כך נבחן את סימן הנגזרת השנייה ונקבל ש־ $f''(x) \le 0$ אם ורק אם $0 \le x \le 3$ לפי

$$f''(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3)$$

ולכן נסכם זאת בטבלה.

קמורה	נקודת פיתול	קעורה	נקודת פיתול	קמורה	תחומי קמירות וקעירות
+	0	-	0	+	$f''(x)$
$x>3$	$x=3$	$0<x<3$	$x=0$	$x<0$	x

מבחינת אסימפטוטות נוכל לראות שאין אסימפטוטות אופקיות לפונקציה (שואפת לאינסוף כאשר $x \to \pm\infty$) ובנוסף אין אסימפטוטות אנכיות מאחר והפונקציה רציפה. אסימפטוטות משופעות קל לפסול מאחר ו־ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. נוכל לחשב את הערכים בנקודות המיוחדות שמצאנו (קיצון ופיתול) ולקבל את השרטוט של הפונקציה.

תרגיל 4.9 חקרו את הפונקציה הבאה:

$$.f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$$

פתרון: נשים לב שמדובר במנה של פולינומים ולכן הפונקציה מוגדרת כל עוד המכנה שונה מ־0, לכן תחום ההגדרה הטבעי הוא $x \neq 0$. אין נקודת חיתוך עם ציר y מאחר והפונקציה

איננה מוגדרת כאשר $x=0$ ובנוסף, אנחנו רואים כי $x^2+1>0$ ולכן אין נקודות חיתוך עם ציר x. נחשב את הנגזרות של הפונקציה ונקבל,

$$f'(x)=\left[\frac{x^2+1}{2x}\right]'=\frac{(2x)^2-2\left(x^2+1\right)}{(2x)^2}=\frac{2x^2-2}{4x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}$$
$$f''(x)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}\right]'=0-\frac{(-2)}{2x^3}=\frac{1}{x^3}.$$

נשווה את הנגזרת הראשונה ל־0 בכדי למצוא נקודות קיצון.

$$\begin{aligned} f'(x)=\frac{x^2-1}{2x^2} &= 0\\ x^2-1 &= 0\\ x_{1,2} &= \pm 1. \end{aligned}$$

כאשר $-1<x<1$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת. בכל יתר תחום ההגדרה, הפונקצה עולה. נסכם זאת בטבלה.

תחומי עלייה וירידה	עולה	נקודת מקסימום	יורדת	נקודת מינימום	עולה
$f'(x)$	+	0	-	0	+
x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1,\ x\neq 0$	$x=1$	$x>1$

נבחן כעת את תחומי קמירות, קעירות ונקודות פיתול. לשם כך נבחן את סימן הנגזרת השנייה ונקבל ש־ $f''(x)\geq 0$ אם ורק אם $x>0$ לפי

$$f''(x)=\frac{1}{x^3}$$

ולכן נסכם זאת בטבלה.

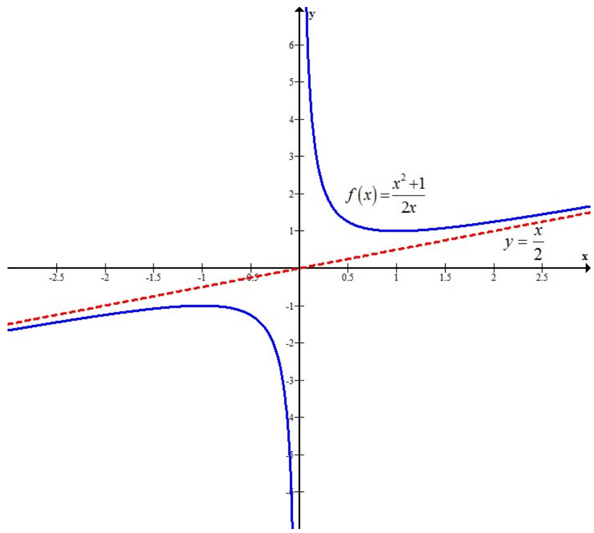
תחומי קמירות וקעירות	קעורה		קמורה
$f''(x)$	-	לא מוגדרת	+
x	$x<0$	$x=0$	$x>0$

אסימפטוטות אנכיות לא יהיו קיימות כאשר $x\neq 0$ מאחר והפונקציה גזירה ורציפה בתחום זה. לעומת זאת

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=\infty$$

לכן ישנה אסימפטוטה אנכית בנקודה $x_0=0$. אסימפטוטות אופקיות לא יהיו מאחר והפונקציה שואפת ל־$\pm\infty$ כאשר $x\to\pm\infty$. נחשב כעת אסימפטוטות משופעות בעזרת הנוסחאות שהוכחנו קודם לכן.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\\ b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}x\right)=0, \end{aligned}$$



איור 17: חקירת פונקציה (תרגיל 4.9)

מצאנו כי $y=\frac{x}{2}$ היא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2} \\ b &= \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}x\right)=0. \end{aligned}$$

קיבלנו שוב את אותה האסימפטוטה. נמצא את ערכי הפונקציה הרלוונטיים ונשרטט את הפונקציה.

תרגיל 4.10 חקרו את הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}x.$$

פתרון: נשים לב ש־$x^2+1>0$ לכל x ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$. לפונקציה יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר y והיא $(0,1)$ ואין נקודות חיתוך נוספות עם הצירים. נחשב את הנגזרות של הפונקציה ונקבל,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right]'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f''(x) &= \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

נשווה את הנגזרת הראשונה ל־0 בכדי למצוא נקודות קיצון.

$$\begin{aligned} f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}} &= 0\\ \sqrt{2}x &= \sqrt{x^2+1}\\ 2x^2 &= x^2+1\\ x^2 &= 1\\ .x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

קיבלנו 2 נקודת חשודות כנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. לאחר הצבה נקבל שהנגזרת מתאפסת רק ב־ $x=1$. כאשר $x<1$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת. בכל יתר תחום ההגדרה, הפונקצה עולה. נסכם זאת בטבלה.

תחומי עלייה וירידה	יורדת	נקודת מינימום	עולה
$f'(x)$	-	0	+
x	$x<1$	$x=1$	$x>1$

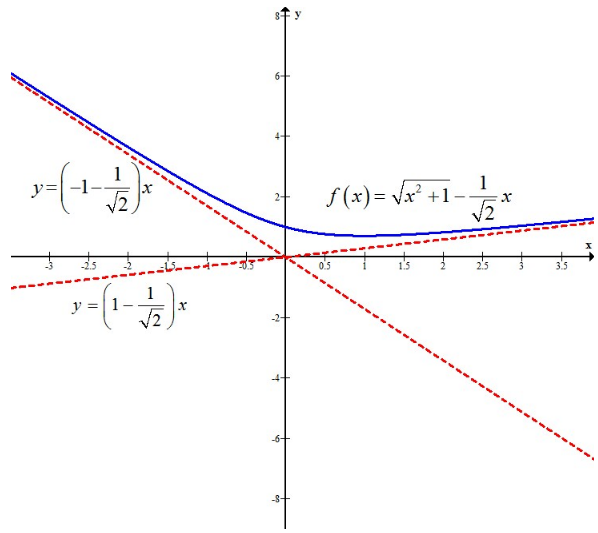
נבחן כעת את תחומי קמירות, קעירות ונקודות פיתול. לשם כך נבחן את סימן הנגזרת השנייה ונקבל ש־ $f''(x)>0$ תמיד לכן הפונקציה היא תמיד קמורה.

אסימפטוטות אנכיות לא יהיו קיימות כאשר מאחר והפונקציה גזירה ורציפה בתחום ההגדרה שלה. נחשב את הגבולות באינסוף ונקבל

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2x^2+2}+x\right)} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2x^2+2}}{x^2}+\frac{1}{x}\right)} = \infty\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{2}} = \infty \end{aligned}$$

לכן לא קיימות אסימפטוטות אופקיות גם כן. נחשב כעת אסימפטוטות משופעות בעזרת הנוסחאות שהוכחנו קודם לכן.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{2}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}-1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ ,b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{2}}-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2-2x^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{2}x}\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{2}x\right)}\right) = 0 \end{aligned}$$



איור 18: חקירת פונקציה (תרגיל 4.10)

מצאנו כי $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x$ היא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה. חישובי הגבול לכיוון השני נותנים את התוצאות הבאות.

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}-1}{\sqrt{2}}=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\\
,b &= \lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{2}}-\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x\right)=\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+2-2x^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^2+2}-\sqrt{2}x}\right)=\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2x^2+2}+\sqrt{2}x\right)}\right)=0
\end{aligned}$$

קיבלנו כי $y=\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x$ היא אסימפטוטה משופעת נוספת של הפונקציה. נמצא את ערכי הפונקציה הרלוונטיים ונשרטט את הגרף שלה.

5 מבחנים ־ אינפי א'

5.1 מבחן לדוגמא ־ ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2014.

5.1.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 5.1 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נסחו והוכיחו את אי־שוויון המשולש.
2. הוכיחו כי לכל x מתקיים $|2-x|-|1+3x|\leq|2x+3|$.

פתרון: אי שוויון המשולש קובע כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־ $|x+y|\leq|x|+|y|$. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. נשים לב כי מתכונות הערך המוחלט אנחנו מקבלים ש־

$$\begin{aligned}-|x|\leq & \quad x & \leq|x|\\ -|y|\leq & \quad y & \leq|y| .\end{aligned}$$

נחבר את צמד האי־שוויונים ונקבל $-(|x|+|y|)\leq x+y\leq|x|+|y|$. זאת אומרת שאם $a=|x|+|y|$, אזי

$$-a\leq x+y\leq a$$

לכן לפי תכונת הערך המוחלט נובע ש־ $|x+y|\leq a=|x|+|y|$ כנדרש.

<u>סעיף ב':</u> נגדיר $a=-1-3x,\ b=2x+3$. מאי־שוויון המשולש נובע כי $|a+b|\leq|a|+|b|$, לכן נציב ונקבל

$$\begin{aligned}|a+b| & \leq & |a|+|b|\\ |-1-3x+2x+3| & \leq & |-1-3x|+|2x+3|\\ |2-x| & \leq & |1+3x|+|2x+3|\\ |2-x|-|1+3x| & \leq & |2x+3| .\end{aligned}$$

תרגיל 5.2 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. תהיינה 2 פונקציות f,g גזירות בנקודה x_0. הוכיחו את נוסחת הנגזרת של מכפלה $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
2. נניח כי $f(1)=3$ וכי $f'(1)=-2$. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $g(x)=xf(x)$ בנקודת ההשקה $x_0=1$.

פתרון: לטובת ההוכחה נשתמש בהגדרת הנגזרת.

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+\frac{f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}g(x_0+h)\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}=\\
&= g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

כאשר בשני המעברים האחרונים יכולנו לפצל את הגבולות ולחשב כל גבול בנפרד לפי כללי אריתמטיקה של גבולות ובגלל שנתון שהנגזרות קיימות בשתי הפונקציות בנקודה הנתונה. לדוגמא:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= f'(x_0)\\
\lim_{h\to 0}g(x_0+h) &= g(x_0)
\end{aligned}$$

מגזירות f ורציפות g בהתאמה (פונקציה גזירה היא גם פונקציה רציפה) ולכן

$$\lim_{h\to 0}g(x_0+h)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g(x_0)f'(x_0)$$

מכללי אריתמטיקה של גבולות.

<u>סעיף ב'</u>: נחשב את הנגזרת של $g(x)$ בנקודה $x_0=1$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= xf(x)+xf'(x)\\
g'(1) &= 1f(1)+1f'(1)=3-2=1
\end{aligned}$$

לכן השיפוע של הפונקציה בנקודה הוא 1. משוואת הישר המשיק בנקודה היא : $y=ax+b$ כאשר $a=1$ ובנוסף מתקיים שהישר עובר בנקודה $(1,3)$. נציב את הנקודה בישר ונקבל $3=1\cdot 1+b$ לכן

$y=x+2$.

5.1.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 5.3 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. חשבו את שני הגבולות הבאים: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cdot4^{x-1}-3^x+6}{4^x+3\cdot3^{x+1}+2}$.

2. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{2x+1}=\infty$.

פתרון: נתחיל בחישוב הגבול עבור $x\to\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot4^{x-1}-3^x+6}{4^x+3\cdot3^{x+1}+2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{4^x\left(3\cdot4^{-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{6}{4^x}\right)}{4^x\left(1+9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{2}{4^x}\right)}= \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3\cdot4^{-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{6}{4^x}\right)}{\left(1+9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{2}{4^x}\right)}= \\ &= \frac{\left(\frac{3}{4}-0+0\right)}{(1+9\cdot0+0)}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cdot4^{x-1}-3^x+6}{4^x+3\cdot3^{x+1}+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{4\cdot4^{-x}}-\frac{1}{3^x}+6}{\frac{1}{4^x}+\frac{9}{3^x}+2}=\frac{0-0+6}{0+0+2}=3.$$

<u>סעיף ב'</u>: נשתמש בהגדרת הגבול עבור גבול אינסופי ו־ $x\to\infty$. צריך להוכיח כי לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>K$ מתקיים $f(x)>M$. יהי $M>0$. ניקח $0<K=\ldots$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $x>K>0$.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+x+1}{2x+1} &> \frac{3x^2+x}{2x+1}=\frac{x^2+2x^2+x}{2x+1}=\frac{x^2}{2x+1}+\frac{2x^2+x}{2x+1}= \\ &> 0+\frac{x(2x+1)}{2x+1}=x>K\end{aligned}$$

נבחר $K=M$ ונקבל שלכל $x>K$ מתקיים ש־ $f(x)>x>K>M$ כנדרש.

תרגיל 5.4 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו כי למשוואה $\ln\left(x^2+x+4\right)=x^2+x-7$ קיימים לפחות 2 פתרונות ממשיים שונים.

2. הוכיחו כי $[\arctan(x)]'=\frac{1}{1+x^2}$.

פתרון: לצורך ההוכחה נשתמש במשפט ערך הביניים. נגדיר פונקצית עזר

$$g(x)=x^2+x-7-\ln\left(x^2+x+4\right)$$

ונשים לב שבכל נקודה בה הפונקציה החדשה מתאפסת אנחנו מקבלים פתרון למשוואה המקורית. תחום ההגדרה של הפונקציה החדשה הוא כל הציר הממשי מאחר ו־
$x^2+x+4>0$ בכל הציר הממשי (לפרבולה x^2+x+4 אין נקודות חיתוך עם ציר x). בנוסף, נשים לב שהפונקציות הן רציפות ולכן $g(x)$ רציפה בכל תחום הגדרתה. עבור $x=\pm10$ נקבל ש־ $g(x)>0$ ועבור $x=0$ נקבל ש־ $g(0)<0$. לכן ממשפט ערך הביניים נובע שבקטעים $[-10,0]$, $[0,10]$ ישנן לפחות 2 נקודות בהן הפונקציה מתאפסת.

סעיף ב': לצורך ההוכחה נשתמש בנוסחה לנגזרת של פונקציה הופכית.

$$\begin{aligned}[\arctan(x)]' &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \\ &= \cos^2(\arctan(x)) = \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

כאשר במעבר הרביעי השתמשנו בזהות $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

תרגיל 5.5 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות (מינימום ומקסימום) של הפונקציה $f(x) = \left(x^2-3x\right)^{\frac{2}{3}}$ בקטע $[-1,4]$.
2. חשבו את הגבול הבא: $\lim_{x\to 1}\frac{x^x\left(x^2-2x+1\right)^2}{\left(e^x-e\right)^2}$.

פתרון: נשים לב כי הפונקציה מוגדרת בכל הקטע הנתון. נחשב את הנגזרת של הפונקציה בקטע ונקבל

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2}{3}\left(x^2-3x\right)^{-\frac{1}{3}}(2x-3) = \\ &= \frac{2(2x-3)}{3\left(x^2-3x\right)^{\frac{1}{3}}}\end{aligned}$$

ואנו רואים כי הנגזרת איננה מוגדרת בנקודות $x=0,3$. בנוסף נשים לב שהנגזרת מתאפסת בנקודה $x=\frac{3}{2}$. על כן הנקודות החשודות (קצוות הקטעים בתוכם הנגזרת מוגדרת ונקודות התאפסות של הנגזרת) שנבדוק הן - $-1,0,\frac{3}{2},3,4$.

$$f(x) = \begin{cases} 4^{\frac{2}{3}} & x=-1 \\ 0 & x=0 \\ \left(-\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}} & x=\frac{3}{2} \\ 0 & x=3 \\ 4^{\frac{2}{3}} & x=4 \end{cases}.$$

קיבלנו נקודות מינימום מוחלט ב-$x=0,3$ ומקסימום מוחלט ב- $x=-1,4$.

סעיף ב': נשים לב כי

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x\left(x^2-2x+1\right)^2}{\left(e^x-e\right)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^x\left(\left(x-1\right)^2\right)^2}{\left(e^x-e\right)^2} = \lim_{x\to 1}x^x\frac{(x-1)^4}{\left(e^x-e\right)^2}.$$

נחשב כעת את הגבול $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^4}{(e^x-e)^2}$ ונשתמש באריתמטיקה של גבולות. בחישוב הבא נשתמש בכלל לופיטל.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^4}{(e^x-e)^2} &\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to1}\frac{4(x-1)^3}{2(e^x-e)e^x}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)^3}{2e^{2x}-2e^{x+1}}= \\ &\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to1}\frac{12(x-1)^2}{4e^{2x}-2e^{x+1}}=\frac{0}{4e^2-2e^2}=0\end{aligned}$$

נשתמש במשפט שאומר שהגבול של מכפלה של פונקציה חסומה ופונקציה ששואפת לאפס הוא אפס ונקבל,

$$\lim_{x\to1}x^x\frac{(x-1)^4}{(e^x-e)^2}=0 .$$

תרגיל 5.6 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. חשבו את הגבול הבא: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$.
2. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה x_0. חשבו את הגבול $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{4h}$.

פתרון: נתחיל בחישוב הגבול. נשתמש בזהות עבור לוגריתם ואקספוננט ונחשב את הגבול שבחזקה בלבד.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x^2+1}} &= \lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}} \\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1} &\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x+1}{(x^2+x+1)}}{2x}= \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{2x\left(x^2+x+1\right)}= \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{2x}}{\left(x^2+x+1\right)}=0\end{aligned}$$

ולכן מרציפות הפונקציה e^x נקבל ש־

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}}=e^0=1 .$$

<u>סעיף ב'</u>: נתחיל החישוב הגבולות הבאים.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{4h} &\underset{t=3h}{=} \lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{\frac{4}{3}t}= \\ &= \frac{3}{4}\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}= \\ &= \frac{3}{4}f'(x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{4h} &\underset{t=-h}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+t)}{-4t}=\\ &= \frac{-1}{-4}\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=\\ &= \frac{1}{4}f'(x_0)\end{aligned}$$

נוכל כעת להשתמש בגבולות הללו בכדי לפתור את השאלה ונקבל,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{4h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{4h}=\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{4h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{4h}=\\ &= \frac{3}{4}f'(x_0)+\frac{1}{4}f'(x_0)=f'(x_0)\end{aligned}$$

תרגיל 5.7 (סעיף 1, 19 נקודות) הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=x^3+2e^x-3x^2+4x+2$ יש נקודת פיתול יחידה והוכיחו את טענותיכם (אין צורך למצוא את הנקודה).

פתרון: נתחיל בחישוב הנגזרות של הפונקציה. נשים לב שהיא מוגדרת בכל הציר הממשי ובנוסף גזירה בכל הציר הממשי.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2+2e^x-6x+4\\ f''(x) &= 6x+2e^x-6\end{aligned}$$

אנו רואים כי $\lim_{x\to\pm\infty}f''(x)=\pm\infty$ לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה c בה הנגזרת השנייה מתאפסת. נסיק מכך שיש תחום בו הפונקציה קמורה ותחום שהיא קעורה בו. אם נוכיח שקיימת רק נקודה אחת בה הנגזרת השנייה מתאפסת אזי נקבל שהיא קמורה מצד אחד של נקודה זו וקעורה מצדה השני ולכן תהיה, לפי הגדרה, רק נקודת פיתול יחידה. נניח בשלילה שיש 2 נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת,

$$.f''(c) \quad =0= \quad f''(d)$$

כעת, לפי משפט רול נובע שישנה נקודה l בין c ל-d כך שהנגזרת של הנגזרת השנייה מתאפסת בה, $f'''(l)=0$. אבל $f'''(x)=6+2e^x\geq 6>0$ תמיד ולכן קיבלנו סתירה. מכאן שישנה רק נקודה אחת בה הנגזרת השנייה מתאפסת וזו נקודת הפיתול היחידה שלנו.

תרגיל 5.8 (3 סעיפים, 19 נקודות) תהי פונקציה $f(x)=e^x-2\ln(x)-5x$.

1. הראו כי לפונקציה יש נקודת קיצון יחידה וקבעו האם זו נקודת מינימום או מקסימום.
2. חשבו את הגבולות $\lim_{x\to 0^+}f(x)\,,\ \lim_{x\to\infty}f(x)$.
3. בעזרת הסעיפים הקודמים (או בכל דרך אחרת) קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$.

פתרון: לשם בחינת נקודות קיצון נמצא את הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציה. נשים לב כי הפונקציה עצמה מוגדרת לכל $x>0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \frac{2}{x} - 5 \\ .f''(x) &= e^x + \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

נשים לב שהנגזרת השנייה תמיד גדולה ממש מאפס ולכן $f'(x)$ היא פונקציה עולה ממש. בנוסף, $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$ ו־ $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה יחידה $c>0$ כך שהנגזרת מתאפסת בנקודה זו. עבור כל $0<x<c$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת ועבור כל $x>c$ הנגזרת חיובית והפונקציה עולה לכן זוהי נקודת מינימום יחידה. אין נקודה נוספת בה הנגזרת מתאפסת מאחר והנגזרת רציפה וגזירה לכל $x>0$ ועולה ממש בתחום זה.

<u>סעיף ב'</u>: נחשב את הגבולות ישירות.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} e^x - 2\ln(x) - 5x = \\ &= \lim_{x\to0^+} e^x - 2\lim_{x\to0^+}\ln(x) - 5\lim_{x\to0^+} x = \\ &= 1 - 2\lim_{x\to0^+}\ln(x) + 0 = \infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x - 2\ln(x) - 5x)}{x} x = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} - 5\right) x = ? \end{aligned}$$

נשתמש בכלל לופיטל עבור חישוב הגבולות הבאים ולאחר מכן נשתמש באריתמטיקה של גבולות בכדי לחשב את הגבול הנ"ל.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) &\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \infty \\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) &\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

נציב חזרה בגבול ונקבל,

$$.\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} - 5\right) x = \infty$$

<u>סעיף ג'</u>: קיבלנו כי בקצוות התחום בהן הפונקציה מוגדרת היא שואפת לאינסוף ובנוסף בסעיף קודם הוכחנו שיש לה נקודת מינימום יחידה. אם הפונקציה מקבלת ערכים שליליים בנקודה כלשהי, אזי נקודת המינימום מתחת לציר x ולכן לפי משפט ערך הביניים למשוואה $f(x)=0$ יהיו 2 פתרונות בדיוק. נשים לב כי $f(1) = e-5 < 0$ ולכן למשוואה יש 2 פתרונות בדיוק.

5.2 מבחן מועד א' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2014.

5.2.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 5.9 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נסחו והוכיחו את משפט קושי.
2. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x. הוכיחו כי לכל $0<x<y$ קיימת נקודה $x<c<y$ כך ש- $\frac{2f(y)-2f(x)}{y^2-x^2}=\frac{f'(c)}{c}$.

פתרון: (משפט קושי) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) ונתון כי $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in[a,b]$. אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

בכדי להוכיח זאת נגדיר פונקציה חדשה.

$$F(x) = f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

נשים לב ש -

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a)-g(a))=f(a) \\ F(b) &= f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a))=f(b)-f(b)+f(a)=f(a) \end{aligned}$$

ובנוסף אנו יודעים שהפונקציה רציפה ב- $[a,b]$ ורציפה ב- (a,b). לכן לפי משפט רול קיימת לפונקציה נקודה $a<c<b$ כך ש- $F'(c)=0$. נמצא את הנגזרת בנקודה c ונשווה ל-0.

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x) \\ F'(c) &= f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0 \\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \end{aligned}$$

כנדרש.

<u>סעיף ב'</u>: יהיו מספרים ממשיים $0<x<y$. נגדיר את $g(x)=x^2$ ונשתמש במשפט קושי לקטע $[x,y]$. תנאי משפט קושי מתקיימים עבור f,g פונקציות רציפות בקטע $[x,y]$ וגזירות בקטע (x,y) ונתון כי $g'(x)=2x\neq 0$ בקטע הנתון. לכן קיימת נקודה $x<c<y$ כך ש-

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y^2-x^2} &= \frac{f'(c)}{2c} \\ \frac{2f(y)-2f(x)}{y^2-x^2} &= \frac{f'(c)}{c}. \end{aligned}$$

תרגיל 5.10 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נסחו והוכיחו את כלל לופיטל למקרה "$\frac{0}{0}$" כאשר $x \to x_0^+$.
2. חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

פתרון: (כלל לופיטל) יהיו 2 פונקציות f,g גזירות בסביבה מנוקבת של x_0 ($g\left(x\right),g'\left(x\right)\neq 0$ בסביבה זו) וכן נתון כי

$$\lim_{x\to x_{0+}} f\left(x\right) \quad = \quad \lim_{x\to x_{0+}} g\left(x\right)=0$$

וגם נתון כי

$$\lim_{x\to x_{0+}} \frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)} \quad = \quad L.$$

אזי,

$$\lim_{x\to x_{0+}} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} \quad = \quad L.$$

בכדי להוכיח זאת נשתמש במשפט קושי. נסתכל על הקטע $[a,b]$ שמכיל את הנקודה x_0 ונגדיר פונקציות חדשות בסביבה זו

$$F\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x\right) & x\neq x_0 \\ 0 & x=x_0 \end{cases},$$

$$G\left(x\right)=\begin{cases} g\left(x\right) & x\neq x_0 \\ 0 & x=x_0 \end{cases}.$$

נשים לב שמרציפות f,g נובע שהפונקציות החדשות רציפות בקטע ובפרט בנקודה x_0 ו־

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^+} F\left(x\right) &= F\left(x_0\right) &= 0 \\ \lim_{x\to x_0^+} G\left(x\right) &= G\left(x_0\right) &= 0. \end{aligned}$$

בנוסף מהגדרת הפונקציות נובע ש־

$$\lim_{x\to x_{0+}}\tfrac{f(x)}{g(x)} = \quad \lim_{x\to x_{0+}} \frac{F\left(x\right)}{G\left(x\right)}=\lim_{x\to x_{0+}}\frac{F\left(x\right)-F\left(x_0\right)}{G\left(x\right)-G\left(x_0\right)}.$$

נשים לב שלכל $x_0<x$ לפי משפט קושי (שתנאיו מתקיימים) קיימת נקודה $x_0<c_x<x$ כך ש־

$$\tfrac{F(x)-G(x_0)}{G(x)-G(x_0)} \quad = \frac{F'\left(c_x\right)}{G'\left(c_x\right)}.$$

בנוסף, אנו רואים שמרציפות מתקיים ש־ $c_x \to x_0^+$ כאשר $x \to x_0^+$ וכן שיש שיוויון בין הנגזרות של F,G ו־ f,g בהתאמה בכל נקודה c_x שכזאת. לכן נובע ש־

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_{0+}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_{0+}} \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \\
&= \lim_{x\to x_{0+}} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \\
&= \lim_{x\to x_{0+}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \\
&\underset{t=c_x}{=} \lim_{t\to x_{0+}} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L
\end{aligned}$$

לפי הנתון, כנדרש.

<u>סעיף ב'</u>: נבצע את החישוב בעזרת כלל לופיטל.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] &\underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}{\frac{1}{t}-1}\sin(t) = \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(1+t^2\right)\sin(t)}{t-t^2} = \\
&\underset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2t\sin(t)+\left(1+t^2\right)\cos(t)}{1-2t} = \\
&= \frac{0+1}{1} = 1
\end{aligned}$$

5.2.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 5.11 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to -3}\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{6}$.
2. חשבו את שני הגבול הבא: $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x+4}\right)$.

פתרון: יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\min\left\{\frac{6\epsilon}{5},1\right\} = \delta > 0$ ונסתכל על כל ה־x כך ש־ $0 < |x-(-3)| < \delta$. נשים לב ש־$|x-(-3)| = |x+3| < \delta$ ובנוסף,

$$\begin{aligned}
-\delta < {} & x+3 & {} < \delta \\
-\delta-6 < {} & x-3 & {} < \delta-6
\end{aligned}$$

ואם לפי הנחה מתקיים ש־ $\delta \le 1$ אזי

$$\begin{aligned}
-7 \le -\delta-6 < {} & x-3 & {} < \delta-6 \le -5 \\
1 & < & |x-3| \\
\frac{1}{|x-3|} & < & 1
\end{aligned}$$

כעת נשתמש בשני החסמים הללו להוכחת הגבול.

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+2}{x-3}-\frac{1}{6}\right| &= \left|\frac{6x+12-x+3}{6(x-3)}\right| = \left|\frac{5x+15}{6(x-3)}\right| = \\ &= \frac{5}{6}\left|\frac{x+3}{x-3}\right| = \frac{5}{6}\cdot\frac{|x+3|}{|x-3|} = \\ &< \frac{5\delta}{6}\cdot\frac{1}{|x-3|} < \frac{5\delta}{6} \le \epsilon\end{aligned}$$

<u>סעיף ב'</u>: נחשב את הגבול באופן ישיר בעזרת אריתמטיקה של גבולות.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x+4}\right) &= \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\frac{(3x+2-3x-4)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x+4}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x+4}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3+\frac{4}{x}}} = \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

תרגיל 5.12 (19 נקודות סה"כ). חקרו את הפונקציה $f(x)=\frac{1-x}{1+x}e^x$ לפי הקריטריונים הבאים: תחום הגדרה, תחומי עלייה וירידה, אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, נקודות חיתוך עם הצירים. שרטטו גרף מקורב של הפונקציה. אין צורך למצוא תחומי קמירות וקעירות.

פתרון: נתחיל בתחום ההגדרה. נשים לב כי הביטוי מוגדר לכל $x\neq -1$ ובנוסף הפונקציה רציפה בכל נקודה שכזו.

נקודות חיתוך עם ציר y נמצא על ידי הצבה של $x=0$: $f(0)=\frac{1-0}{1+0}e^0=1$ ולכן יש נקודת חיתוך $(0,1)$. נעבור למציאת נקודות חיתוך עם ציר x.

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1+x}e^x &= 0\\ x &= 1\end{aligned}$$

לכן ישנה נקודת חיתוך נוספת - $(1,0)$. בכדי למצוא תחומי עלייה וירידה נמצא את הנגזרת של הפונקציה.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right)e^x+\frac{1-x}{1+x}e^x\\ &= \frac{-2}{(1+x)^2}e^x+\frac{1-x^2}{(1+x)^2}e^x = \\ &= \frac{\left(-1-x^2\right)}{(1+x)^2}e^x<0\end{aligned}$$

קיבלנו שהפונקציה תמיד יורדת בכל תחום ההגדרה שלה. שימו לב כי ישנה בעיה של אי רציפות של הנגזרת ב־$x=-1$ ולכן זו נקודה חשודה. אנחנו נראה מה קורה בנקודה זו בחישוב האסימפטוטות.

נבדוק אם יש אסימפטוטה אנכית בנקודה $x=-1$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה ולכן זה לא אפשרי.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^+}\frac{1-x}{1+x}e^x &= \frac{2}{0^+}e^{-1}=\infty\\
\lim_{x\to-1^-}\frac{1-x}{1+x}e^x &= \frac{2}{0^-}e^{-1}=-\infty
\end{aligned}$$

לכן יש לנו אסימפטוטה אנכית בנקודה זו. נמצא אסימפטוטות אופקיות.

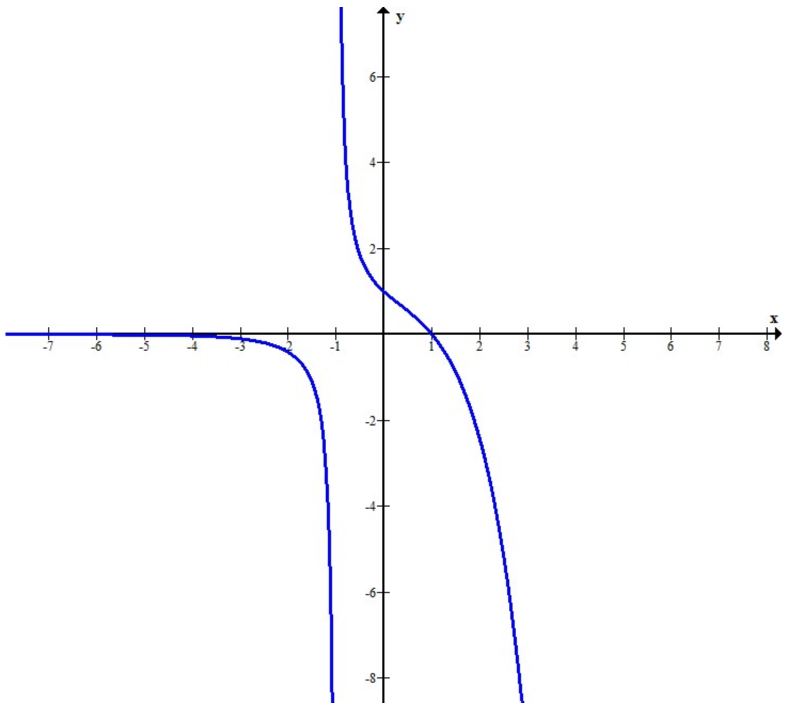
$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)e^x}{x+x^2}=\\
&\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-e^x+(1-x)e^x}{2x+1}=\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-xe^x}{2x+1}=\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-e^x}{2+\frac{1}{x}}=-\infty
\end{aligned}$$

מכאן נסיק שאין אסימפטוטה כאשר $x\to\infty$. נבחן את הגבול לכיוון השני.

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)e^x}{x+x^2}=\\
&\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^x+(1-x)e^x}{2x+1}=\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{2x+1}=\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-e^x}{2+\frac{1}{x}}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{1+x}e^x=\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}e^x=0
\end{aligned}$$

ז"א ישנה אסימפטוטה $y=0$ כאשר $x\to-\infty$.



איור 19: שרטוט מקורב של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1-x}{1+x}e^{x}$

תרגיל 5.13 (2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ) תהי פונקציה $f(x)=x^{4}+e^{x}-\frac{1}{x}$.

1. הוכיחו כי למשוואה $f(x)=0$ יש פתרון חיובי אחד ויחיד.
2. הוכיחו כי לפונקציה הנתונה יש נקודת פיתול חיובית אחת ויחידה.

פתרון: נשים לב כי הפונקציה מוגדרת לכל $x\neq 0$. נבצע חקירת פונקציה בכדי להבין את התנהגותה. נתחיל במציאת תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x) \quad = \quad 4x^{3}+e^{x}+x^{-2}$$

נשים לב שהנגזרת תמיד חיובית כאשר $x>0$ וכן עבור $x\to 0^{+}$ אנחנו רואים ש־$f'(x)\to -\infty$. בנוסף,

$$f(1) \quad = \quad 1+e-1=e>0$$

לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה בקטע $(0,1)$ כך שהפונקציה מתאפסת בנקודה זו. מאחר והנגזרת תמיד חיובית כאשר $x>0$ אזי לפי משפט שראינו בכיתה נובע ש־$f(x)>g(x)$ כאשר $g(x)=1$ לכל $x>1$ בתחום $(1,\infty)$. על כן, בחלקו החיובי של הציר ממשי הפונקציה שלנו יכולה להתאפס רק בקטע $(0,1)$.

נניח בשלילה שיש 2 נקודות בהן היא מתאפסת. לכן לפי משפט רול נובע שיש נקודה בקטע $c \in (0,1)$ כך ש־ $f'(c) = 0$. אבל דבר זה סותר את העובדה שהנגזרת תמיד חיובית בקטע זה ולכן נקבל שיש רק נקודה אחת בה הנגזרת מתאפסת בחלקו החיובי של הציר הממשי.

<u>סעיף ב'</u>: נסתכל על הנגזרת הראשונה ונשים לב שהיא תמיד חיובית. נמצא את הנגזרת השנייה ונקבל

$$f''(x) = 12x^2 + e^x - 2x^{-3},$$

נשים לב שזו פונקציה גזירה ורציפה עבור כל $x \neq 0$. בנוסף, כאשר $x \to 0^+$ אנחנו רואים ש־ $f''(x) \to -\infty$ ו־ $f''(1) > 0$ לכן ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים בקטע זה ולקבל שקימת נקודה בה הנגזרת השנייה מתאפסת.

עבור כל $x > 1$ אנו רואים ש־ $f''(x) > 0$ מאחר ובנקודה $x = 1$ הנגזרת השנייה היא חיובית ובנוסף $f'''(x) > 0$ לכל $x > 0$ (פונקציה מונוטונית עולה ממש). לכן נקודות התאפסות של $f''(x)$ בחלקו החיובי של הציר הממשי יכולים להתרחש רק כאשר $x \in (0,1)$. מאותם שיקולים שראינו קודם לכן, לא יכולות להיות 2 נקודות בהן $f''(x)$ מתאפסת מאחר והנגזרת שלה חיובית לכל $x > 0$ ($f'''(x) > 0,\ \forall x > 0$) ולכן קיבלנו את התוצאה הרצויה.

תרגיל 5.14 (2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ) .

1. הוכיחו כי לכל $x \geq 1$ מתקיים $xe^{-x} \geq \frac{1}{e} - \frac{(x-1)^2}{2}$.
2. מצאו את כל האסימפטוטות האנכיות והמשופעות של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} \cdot e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0, \pi \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x = \pi \end{cases}.$$

פתרון: נתחיל בהגדרת הפונקציה $f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{e} + \frac{(x-1)^2}{2}$. נשים לב ש־ $f(1) = 0$ ונסתכל על הנגזרת של הפונקציה כאשר $x > 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} + (x-1) = \\ &= -e^{-x}(x-1) + (x-1) = \\ &= \left(-\frac{1}{e^x} + 1\right)(x-1) \end{aligned}$$

נשים לב שהנגזרת חיובית ממש עבור $x > 1$ לכן אם ניקח את הפונקציה $g(x) = 0$ אז לפי המשפט שראינו (2 הפונקציות השוות בנקודה ספציפית והנגזרת של אחת גדולה מהנגזרת של השנייה) נקבל שהפונקציה f גדולה ממש מ־g לכל $x > 1$ ולכן הטענה נכונה.

<u>סעיף ב'</u>: נחפש תחילה אסימפטוטות אנכיות. נשים לב שבכל נקודה למעט $x = 0, \pi$ הפונקציה היא רציפה וגזירה ולכן לא יהיו אסימפטוטות אנכיות.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} \cdot e^{\frac{1}{x}} &\underset{t=x-\pi}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot e^{\frac{1}{t+\pi}} = \\ &= 1 \cdot e^{\frac{1}{\pi}} \end{aligned}$$

לכן אין אסימפטוטה אנכית בנקודה זו. נחשב כעת את הגבול הבא.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\sin(x-\pi)\,e^{\frac{1}{x}} &\underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{t}-\pi\right)}{e^{-t}} = \\ &\underset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}-\pi\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-e^{-t}} = \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}-\pi\right)}{t^2e^{-t}}\end{aligned}$$

נחשב כעת את הגבול $\lim_{t\to\infty}t^2e^{-t}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}t^2e^{-t} &= \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t} = \\ &\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t} = \\ &\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^t} = 0\end{aligned}$$

לכן לסיכום נקבל ש־ $\lim_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$ ומכאן נובע ש־ $\lim_{x\to 0^+}\sin(x-\pi)\,e^{\frac{1}{x}}=-\infty$ ולכן גם $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)}e^{\frac{1}{x}}=\infty$. זאת אומרת שקיבלנו אסימפטוטה אנכית בנקודה $x=0$.

עבור אסימפטוטות משופעות נצטרך לחשב תחילה את הגבול - $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin(x-\pi)\,e^{\frac{1}{x}}}{(x-\pi)\,x}=0$$

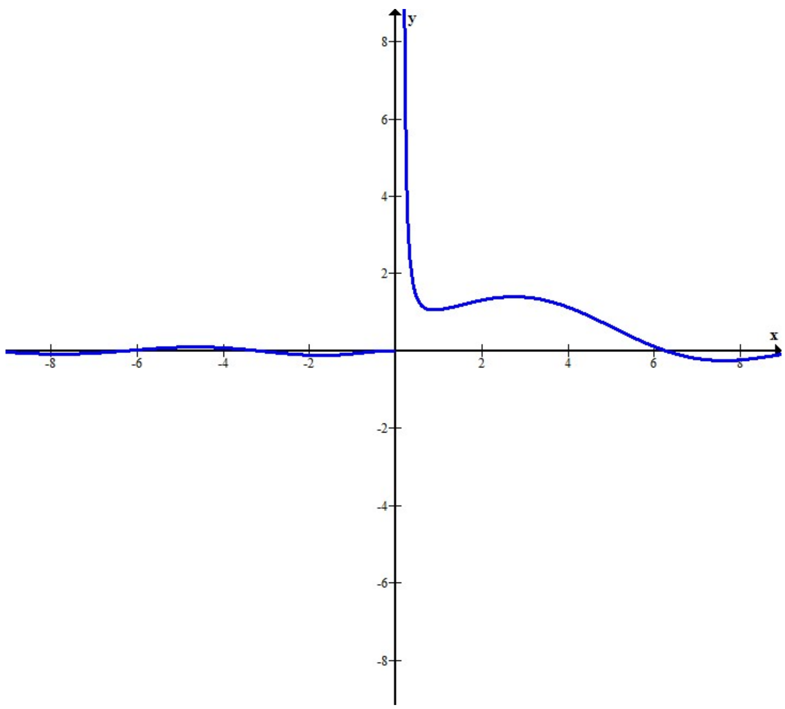
כאשר השיוויון האחרון נובע מכך שיש לנו פונקציה חסומה כפול פונקציה שמתאפסת $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(x-\pi)x}=0$. נצטרך כעת למצוא את b.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-ax = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin(x-\pi)\,e^{\frac{1}{x}}}{(x-\pi)}=0,$$

מאחר ופונקציה חסומה כפול פונקציה שמתאפסת נותנת גבול אפסי. לכן ישנן אסימפטוטות $y=0$.

תרגיל 5.15 (2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ).

1. חשבו את הגבול הבא $\lim_{x\to\infty}\left(1+x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
2. תהי פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)\geq -1$ לכל x. הוכיחו מהגדרת הגבול כי אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ ו־ $L\geq -1$ אזי $\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{L+1}$.



איור 20: שרטוט גרף הפונקציה בשאלה $.f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0,\pi\\ 0 & x=0\\ 1 & x=\pi\end{cases}$

פתרון: נבצע את החישוב ישירות.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(1+x+2x^2\right)}{x^2}} =?\\
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x+2x^2\right)}{x^2} &\overset{}{\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{1+4x}{2x\left(1+x+2x^2\right)} =\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+4x}{2x+2x^2+4x^3} =\\
&\underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{4}{2+4x+12x^2} = 0
\end{aligned}$$

לכן מרציפות הפונקציה e^x נקבל ש-

$$.\lim_{x\to\infty}\left(1+x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(1+x+2x^2\right)}{x^2}} = e^0 = 1$$

<u>סעיף ב'</u>: יהי $\epsilon>0$. אם $L=-1$ אז נשים לב שמהגדרת הגבול עבור $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים ש- $|f(x)+1|<\epsilon^2$. מאחר ו- $f(x)+1\geq 0$ נובע ש- $|f(x)+1|=f(x+1)$ ז"א ש- $\sqrt{f(x)-(-1)}<\epsilon$. לכן נשים לב שעבור כל $x>M$ כזה נקבל ש-

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{f(x)+1}-\sqrt{L+1}\right| &= \left|\sqrt{f(x)+1}-\sqrt{-1+1}\right| =\\
&= \left|\sqrt{f(x)+1}-0\right| =\\
&= \left|\sqrt{f(x)+1}\right| =\\
&= \sqrt{f(x)+1}<\epsilon
\end{aligned}$$

כנדרש.

אחרת $L>-1$. מהגדרת הגבול עבור $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים ש- $|f(x)-L|<\epsilon\sqrt{L+1}$. נסתכל על כל ה-$x>M$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{f(x)+1}-\sqrt{L+1}\right| &= \left|\frac{f(x)+1-L-1}{\sqrt{f(x)+1}+\sqrt{L+1}}\right| =\\
&= \frac{|f(x)-L|}{\left|\sqrt{f(x)+1}+\sqrt{L+1}\right|} =\\
&= \frac{|f(x)-L|}{\sqrt{f(x)+1}+\sqrt{L+1}} \leq\\
&= \frac{|f(x)-L|}{\sqrt{L+1}} <\\
&= \frac{\epsilon\sqrt{L+1}}{\sqrt{L+1}} = \epsilon
\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 5.16 (2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ).

1. תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ המקיימת $0 \leq f(x) \leq 1$ לכל $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע כך ש־ $f(c)=\sin(c)$.
2. תהי פונקצית דיריכלה

$$D(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 \quad 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

הראו ש־ $f(x)=x^2 D(x)$ גזירה בנקודה x אם ורק אם $x=0$.

פתרון: נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=f(x)-\sin(x)$ ונשים לב שהפונקציה חסומה בין -1 ל־1. כל נקודה בה הפונקציה מתאפסת מקיימת את התנאי בשאלה ולכן נחפש נקודות בהן הפונקציה מתאפסת. אם $g(0)=0$ אזי $f(0)=\sin(0)=0$ והנקודה $c=0$ מקיימת את התנאי. אם $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ אז $c=\frac{\pi}{2}$ מקיימת את הנדרש בשאלה. אחרת $g(0), g\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. אם הסימן של $g(0)$ ו־$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ מנוגדים אז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $0<c<\frac{\pi}{2}$ כך ש־ $g(c)=0$ כנדרש. אחרת הסימנים של $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ו־ $g(0)$ זהים.

1. אם $g(0)>0$ ו־ $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, אז $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, סתירה.
2. אם $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ ו־ $g(0)<0$, אז $f(0)<\sin(0)=0$, סתירה.

לכן נותרנו עם המצב היחיד האפשרי וזה שיש ערכים מנוגדים בקצוות ולכן הנקודה המבוקשת אכן קיימת.

<u>סעיף ב'</u>: נניח ש־ $x=0$ ונראה ש־ $x^2 D(x)$ גזירה באפס.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(h+0)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 D(h)-0}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} hD(h)=0 \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נכון מאחר ויש מכפלה של פונקציה חסומה ופונקציה מתאפסת. נניח כעת כי $f(x)$ גזירה בנקודה x ונראה ש־ $x=0$. נניח בשלילה ש־ $x \neq= 0$. לכן נובע ש־ $\frac{f(x)}{x^2}$ היא פונקציה גזירה מאחר והיא מנה של פונקציות גזירות והמכנה שונה מאפס. אבל, מצד שני, ידוע כי $\frac{f(x)}{x^2}=D(x)$ ואנחנו יודעים שפונקצית דיריכלה איננה רציפה או גזירה בשום נקודה לכן קיבלנו סתירה. על כן נסיק כי אם $f(x)$ גזירה אזי $x=0$.

5.3 מבחן מועד א' ־ ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2015.

5.3.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 5.17 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נניח שקיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ הוכיחו כי:

1. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x)| \leq 1 + |L|$.
2. אם בנוסף $L \neq 0$, אז קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x)| \geq \frac{|L|}{2}$.

פתרון:

1. נבחר $\epsilon = 1$. מהגדרת הגבול נובע שקיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < 1$. לכן

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$$

כנדרש.

2. אם $L > 0$ אזי נבחר $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$. מהגדרת הגבול נובע שקיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \frac{L}{2}$. כלומר

$$\begin{aligned} -\frac{L}{2} &< f(x) - L < \frac{L}{2} \\ 0 < \frac{|L|}{2} = \frac{L}{2} &< f(x) < \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

ולכן

$$f(x) = |f(x)| > \frac{|L|}{2}.$$

אם $L < 0$, אזי נבחר $\epsilon = -\frac{L}{2} > 0$. מהגדרת הגבול נובע שקיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < -\frac{L}{2}$. כלומר

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &< f(x) - L < -\frac{L}{2} \\ \frac{3L}{2} &< f(x) < \frac{L}{2} < 0 \end{aligned}$$

ולכן

$$|f(x)| = -f(x) > -\frac{L}{2} = \frac{|L|}{2}.$$

תרגיל 5.18 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נסחו והוכיחו את משפט רול.
2. תהיי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בכל נקודה על הישר. נניח כי $f''(x) > 0$ לכל x. כמה פתרונות לכל היותר יתכנו למשוואה $f(x) = 0$?

פתרון:

1. משפט רול ־ תהיי f פונקציה רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b). נניח בנוסף ש־ $f(a) = f(b)$. אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־ $f'(c) = 0$. נוכיח זאת. אם הפונקציה היא פונקציה קבועה אז בהכרח הנגזרת שלה שווה ל־0 בכל נקודה בקטע והמשפט מתקיים באופן מיידי. אחרת f איננה פונקציה קבועה. ממשפט ויירשטראס נובע שקיימת נקודת מקסימום לפונקציה x_1 ונקודת מינימום x_2 בקטע $[a,b]$. אם אחת מהנקודות הנ"ל איננה נקודת קצה, קרי שונה מ־a ושונה מ־b, אז היא נקודת קיצון פנימית וממשפט פרמה נובע שהנגזרת בה מתאפסת. נניח בשלילה ששתי הנקודות הן נקודות קצה. לכן מתקיים, על פי הנתון, ש־ $f(x_1) = f(x_2)$ ובפרט הפונקציה היא פונקציה קבועה. סתירה.

2. למשוואה ייתכנו לכל היותר 2 פתרונות. נניח בשלילה שלמשוואה יש לפחות 3 פתרונות שונים , $x_1 < x_2 < x_3$. אזי לפי משפט רול, קיימות נקודות $c_1 \in (x_1, x_2)$ ו־ $c_2 \in (x_2, x_3)$ כך ש־$f(c_1) = f(c_2) = 0$. אם נשתמש שוב במשפט רול עבור הנגזרת f' נקבל שקיימת נקודה $d \in (c_1, c_2)$ כך ש־ $f''(d) = 0$ וזאת סתירה לנתון.

5.3.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 5.19 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{2}$.
2. חשבו את הגבול הבא: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{3+x}\right)^{\frac{1-x^2}{x}}$.

פתרון:

1. יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\min\{1,\epsilon\}>0$ ונבחר x המקיים $0<|x-1|<\delta$. נשים לב ש־

$$\begin{array}{rcl} -\delta< & x-1 & <\delta \\ -3=-1-2\le-\delta-2< & x-3 & <\delta-2\le 1-2=-1 \\ 1< & |x-3| & <3 \\ \frac{1}{3}< & \frac{1}{|x-3|} & <1 \end{array}$$

לכן

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-2}{x-3}-\frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2x-4-x+3}{2(x-3)}\right|= \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{x-1}{x-3}\right|= \\ &= \frac{1}{2}\cdot|x-1|\cdot\frac{1}{|x-3|}< \\ &= \frac{1}{2}\cdot\delta\cdot 1\le\frac{\epsilon}{2}<\epsilon. \end{aligned}$$

2. נחשב את הגבול ישירות, אבל תחילה נחשב את הגבול הבא

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{3+x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{3}{x}+1}\right)}{\frac{1}{x}}= \\ [\text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}]L&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{\frac{x+1}{x+3}}= \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{(x+3)(x+1)}= \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2+4x+3}= \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=-2. \end{aligned}$$

לכן נקבל ש־

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-x^2\right)\ln\left(\frac{1+x}{3+x}\right)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln\left(\frac{1+x}{3+x}\right)= \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{3+x}\right)-x\ln\left(\frac{1+x}{3+x}\right)\right]= \\ &= 0\cdot 0-(-2)=2,\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון בוצע בעזרת אש"ג.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{3+x}\right)^{\frac{1-x^2}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\left(1-x^2\right)}{x}\ln\left(\frac{1+x}{3+x}\right)}=e^2 .$$

תרגיל 5.20 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. נתונות שתי פונקציות $f(x)=3x^2-x-3,\ g(x)=-x^2+5x-24$. מצאו נקודה A על הגרף של f ונקודה B על הגרף של g כך שהקטע בין A ל־B ישיק לגרף של f ב־A ולגרף של g ב־B.
2. חשבו את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

פתרון:

1. נסמן $A=(a,f(a))$ ו־ $B=(b,g(b))$. נדרוש שהנקודות יקיימו את התנאי הבא

$$\frac{f(a)-g(b)}{a-b} = f'(a)=g'(b) .$$

נרשום את המשוואות בצורה מפורשת.

$$\begin{aligned}\frac{3a^2-a-3+b^2-5b+24}{a-b} &= 6a-1 \\ 6a-1 &= -2b+5\end{aligned}$$

מהמשוואה השנייה נקבל ש־ $b=3-3a$ נציב במשוואה הראשונה ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{3a^2-a-3+(3-3a)^2-5(3-3a)+24}{a-3+3a} &= 6a-1 \\ \frac{3a^2-a-3+9-18a+9a^2-15+15a+24}{4a-3} &= 6a-1 \\ 12a^2-4a+15 &= 24a^2-18a-4a+3 \\ 0 &= 12a^2-18a-12 \\ 0 &= 2a^2-3a-2 \\ a_{1,2} &= \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=2,-\frac{1}{2} .\end{aligned}$$

לכן $b=-3,4.5$. נבחר את הנקודות $A=(2,7)$ ו־ $B=(-3,-48)$ ונקבל שיפוע

$$\frac{7+48}{2+3}=\frac{55}{5}=11=f'(2)=g'(-3).$$

2. נחשב את הגבול ישירות

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^{x}+1\right)-2\left(e^{x}-1\right)}{x^{3}} &= \lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+x-2e^{x}+2}{x^{3}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(x-2)+x+2}{x^{3}} =\\
\left[\text{“}\tfrac{0}{0}\text{”}\right] L&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(x-2)+e^{x}+1}{3x^{2}} =\\
\left[\text{“}\tfrac{0}{0}\text{”}\right] L&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(x-2)+e^{x}+e^{x}}{6x} =\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{6}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

תרגיל 5.21 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו כי $|\arctan(x)-\arctan(y)|\le|x-y|$ לכל x,y.
2. מצאו את כל האסימפטוטות האנכיות (אם קיימות) לפונקציה הבאה:

$$f(x)=\frac{\ln(x)\cdot(x-1)\cdot(x+1)^{-\frac{2}{3}}}{\sin(x-1)}.$$

פתרון:

1. נשים לב שפונקציית ה־$\arctan(x)$ היא גזירה בכל נקודה. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ נקודות על הציר הממשי. ממשפט לגראנג' נובע שקיימת נקודה $z\in[x,y]$ כך ש־

$$\frac{\arctan(x)-\arctan(y)}{x-y} = \frac{1}{1+z^{2}}\le 1.$$

לכן,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\arctan(x)-\arctan(y)}{x-y}\right| &= \left|\frac{1}{1+z^{2}}\right|\le 1\\
&\Downarrow\\
|\arctan(x)-\arctan(y)| &\le |x-y|
\end{aligned}$$

כנדרש.

2. נמצא את כל האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה. נשים לב שהפונקציה מוגדרת כאשר $x > 0$ וכאשר $x - 1 \neq \pi k$ לכל $k \in \mathbb{Z}$. זאת אומרת, הפונקציה לא מוגדרת כאשר $x \leq 0$ וכאשר $x = 1 + \pi k$ עם $k \in \mathbb{N}$. בכל יתר הציר הממשי הפונקציה מוגדרת והמכנה לא מתאפס. בנוסף, הן המכנה והן המונה מורכבים מפונקציות רציפות

$$f(x) = \frac{\ln(x) \cdot (x-1)}{\sin(x-1)(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

ולכן הפונקציה רציפה בתחום הגדרתה. נבדוק אסימפטוטות אנכיות כאשר $x \to 0^+$ וכאשר $x \to 1 + \pi k$ עבור k חיובי שלם.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x) \cdot (x-1)}{\sin(x-1)(x+1)^{\frac{2}{3}}} \overset{\text{"}\frac{-\infty\cdot -1}{-\sin(1)\cdot 1}\text{"}}{=} -\infty$$

ולכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב־$x = 0$. יהי k חיובי ושלם.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+\pi k^+} \frac{\ln(x) \cdot (x-1)}{\sin(x-1)(x+1)^{\frac{2}{3}}} &\overset{t=x-1-\pi k}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t+1+\pi k) \cdot (t+1+\pi k-1)}{\sin(t+1+\pi k-1)(t+1+\pi k+1)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t+1+\pi k)\cdot(t+\pi k)}{\sin(t+\pi k)(t+\pi k)^{\frac{2}{3}}} = \pm\infty\end{aligned}$$

כאשר הסימן נקבע בהתאם לזוגיות של k. לכן נובע שיש אסימפטוטות אנכיות גם בכל $x = 1 + \pi k$ כאשר k חיובי ושלם.

תרגיל 5.22 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. מצאו את הערך המקסימאלי והערך המינימאלי של הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$ בקטע $[0, 4]$.
2. הוכיחו כי למשוואה $x^3 - x = \cos(x)$ יש פתרון חיובי יחיד.

פתרון:

1. ממשפט ווירשטראס אנו יודעים שקיימים ערכים כאלה מאחר ומדובר בפונקציה רציפה על קטע סגור. נמצא נקודות קריטיות לפונקציה.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4x - x^2} + x \cdot \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0 \\ 0 &= 2\left(4x - x^2\right) + 4x - 2x^2 \\ 0 &= -4x^2 + 12x \\ 0 &= x^2 - 3x \\ x_{1,2} &= 0, 3 \end{aligned}$$

קיבלנו שיש 3 נקודות קריטיות ־ $0,3,4$. נבדוק את ערכי הפונקציה בנקודות הללו.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(3) &= 3\sqrt{3} \\ f(4) &= 0 \end{aligned}$$

ולכן ערכי המקסימום והמינימום הם $0, 3\sqrt{3}$ בהתאמה.

2. נגדיר פונקצית עזר $f(x) = x^3 - x - \cos(x)$ ונסתכל על $x > 0$. עבור כל $0 < x < 1$ נשים לב ש־ $x^3 - x < 0$ וגם $\cos(x) > 0$ ולכן נקבל ש־

$$f(x) < 0$$

לכל $x \in [0,1]$. בנוסף, $f(1) = 1 - 1 - \cos(1) < 0$ ו־ $f(2) = 8 - 2 - \cos(2) > 0$ ולכן בקטע $(1,2)$ לפי משפט ערך הביניים (הפונקציה גזירה ורציפה בכל הציר הממשי) נקבל שיש נקודה c בה $f(c) = 0$. נניח בשלילה שקיימת נקודה נוספת $c' > 1$ בה הפונקציה מתאפסת. לפי משפט רול, בין c ו־ c' קיימת נקודה בה הנגזרת מתאפסת.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 + \sin(x) > \\ &> 3 - 1 - 1 = 1 > 0 \end{aligned}$$

לכל $x > 1$. סתירה.

תרגיל 5.23 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. תהיי פונקציה $f(x)$ המקיימת $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ובנוסף $f(x) > 0$ לכל x. הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול כי $\lim_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

2. נתונה פונקציה

$$f(x) = \frac{x^2 + Ax + B}{x^2 - 4}.$$

ונתון כי $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{7}{4}$. מצאו את ערכי A ו־ B.

פתרון:

1. יהי $M > 0$. נקבע $\epsilon = \frac{1}{M} > 0$ ולפי הגדרת הגבול קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ מתקיים

$$\begin{aligned} |f(x) - 0| &< \epsilon \\ &\Downarrow \\ 0 < f(x) &< \epsilon \end{aligned}$$

על פי הנתון בשאלה. לכן

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon} = M$$

לכל $0 < |x - 0| < \delta$ כנדרש.

2. נניח בשלילה ש־

$$\lim_{x\to 2} x^2 + Ax + B \neq 0 .$$

מאחר ומדובר בפולינום, אנו יודעים שהגבול קיים ולכן, נקבל שהגבול הבא איננו סופי $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+Ax+B}{x^2-4}$ (מאחר והמכנה מתאפס והמונה מתכנס לערך שאיננו אפס) בסתירה לנתון, לכן הגבול הנ"ל כן שווה ל־0. נשתמש ברציפות ונקבל

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} x^2 + Ax + B &= 4 + 2A + B = 0 . \\ B &= -4 - 2A . \end{aligned}$$

נציב חזרה ב־$f(x)$ ונקבל

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + Ax - 4 - 2A}{x^2 - 4} = \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + A(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \frac{(x+2) + A}{(x+2)}. \end{aligned}$$

נחשב כעת את הגבול הנתון ונקבל

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2) + A}{(x+2)} = \\ &= \frac{4 + A}{4}. \end{aligned}$$

נשווה זאת ל־$\frac{7}{4}$ ונקבל $A = 3,\ B = -10$.

תרגיל 5.24 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. תהיי פונקציה $f(x) = a\ln(e^x - 2) + e^x + 4x$. נתון כי לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $x = \ln(4)$.

1. מצאו את הערך של a.

2. חקרו את הפונקציה עבור הערך ה־a שמצאתם בסעיף א' לפי הקריטריונים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון מקומיות, קמירות, קעירות ונקודות פיתול, וכן אסימפטוטות (משופעות ואנכיות). שרטטו את גרף הפונקציה.

פתרון:

1. נגזור את הפונקציה, נציב $x = \ln(4)$ ונשווה לאפס.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{e^x - 2} \cdot e^x + e^x + 4 \\ f'(\ln(4)) &= \frac{a}{e^{\ln(4)} - 2} \cdot e^{\ln(4)} + e^{\ln(4)} + 4 = 0 \\ \frac{a}{2} \cdot 4 + 4 + 4 &= 0 \\ a &= -4 . \end{aligned}$$

2. נתחיל במציאת תחום הגדרה לפונקציה.

(א) תחום הגדרה: נדרוש $e^x - 2 > 0$ ונקבל $x > \ln(2)$.

(ב) נקודות קיצון מקומיות: הפונקציה היא גזירה ורציפה בכל תחום הגדרתה על פי אריתמטיקה של פונקציות גזירות ורציפות. נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונקבל

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4e^x}{e^x-2} + e^x + 4 = 0 \\ 0 &= -4e^x + (e^x+4)(e^x-2) \\ 0 &= -4e^x + e^{2x} - 2e^x + 4e^x - 8 \\ 0 &= e^{2x} - 2e^x - 8 \\ 0 &= t^2 - 2t - 8 \end{aligned}$$

כאשר ביצענו החלפה $t = e^x$.

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \\ &= \frac{2 \pm 6}{2} = 4, -2. \end{aligned}$$

נשים לב ש- $t = e^x > e^{\ln(2)} = 2$ ולכן הפתרון $t = -2$ אינו בתחום ההגדרה. על כן ניקח את הערך $e^x = 4$, קרי $x = \ln(4)$. נבדוק את ערכי הנגזרת מימין ומשמאל לנקודה ונסכם זאת בטבלה.

i.

תחומי עלייה וירידה	יורדת	נקודת מינימום	עולה
$f'(x)$	-	0	+
x	$\ln(2) < x < \ln(4)$	$x = \ln(4)$	$x > \ln(4)$

(ג) קמירות, קעירות ונקודות פיתול: נחשב את הנגזרת השנייה של הפונקציה.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4e^x(e^x-2) + 4e^{2x}}{e^x-2} + e^x = \\ &= \frac{8e^x + e^{2x} - 2e^x}{e^x-2} = \\ &= \frac{6e^x + e^{2x}}{e^x-2} \end{aligned}$$

המכנה תמיד חיובי בתחום ההגדרה וכן המונה חיובי בכל הציר הממשי ולכן הנגזרת השנייה תמיד חיובית. זאת אומרת, הפונקציה היא פונקציה קמורה.

(ד) אסימפטוטות: נמצא תחילה אסימפטוטות אנכיות. מאחר והפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה, נותר לבדוק אם יש אסימפטוטה כאשר $x \to \ln(2)^+$.

$$\lim_{x \to \ln(2)^+} -4\ln(e^x-2) + e^x + 4x \overset{t=e^x}{=} \lim_{t \to 2^+} -4\ln(t-2) + t + 4\ln(t) = \infty,$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב־$x = 2$. נחשב כעת אסימפטוטה משופעת כאשר $x \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{-4\ln(e^x-2)+e^x+4x}{x} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-4\ln(e^x-2)}{x}+\frac{e^x}{x}+4.\end{aligned}$$

נחשב מספר גבולות בנפרד.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \overset{\left[„\frac{\infty}{\infty}"\right]L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty,$$

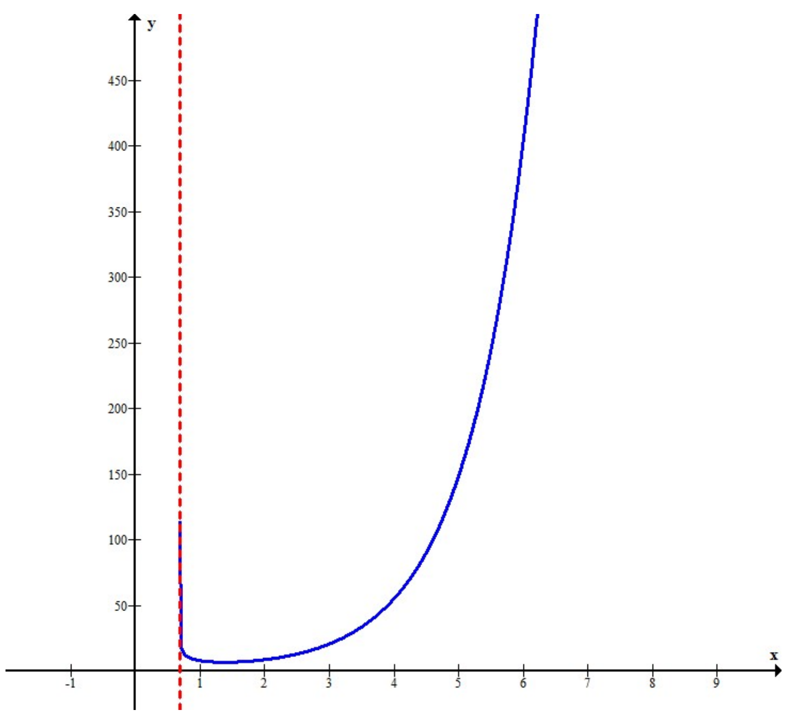
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x-2)}{x} \overset{\left[„\frac{\infty}{\infty}"\right]L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x-2}=0$$

ולכן נקבל ש־

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4\ln(e^x-2)}{x}+\frac{e^x}{x}+4=\infty$$

ומכאן שאין אסימפטוטה משופעת.

(ה) <u>שירטוט של גרף הפונקציה</u>:



איור 21: שרטוט מקורב של גרף הפונקציה $f(x) = -4\ln(e^x-2)+e^x+4x$

5.4 מבחן מועד ב' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר א' 2015.

5.4.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 5.25 24 נקודות סה"כ. תהיינה פונקציות f,g ונניח כי f גזירה בנקודה x_0 וכי g גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$. הוכיחו כי $g \circ f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים ש־ $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

פתרון: נתבונן בפונקציה

$$G(x) = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} & f(x) \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & f(x) = f(x_0) \end{cases}.$$

נשים לב ש־$g(f(x)) - g(f(x_0)) = G(x)(f(x) - f(x_0))$. לכן אם $f(x) = f(x_0)$ אזי

$$\lim_{x \to x_0} G(x) = \lim_{x \to x_0} g'(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

אחרת,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} G(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \\ &\overset{t=f(x)}{=} \lim_{t \to f(x_0)} \frac{g(t) - g(f(x_0))}{t - f(x_0)} = g'(f(x_0)). \end{aligned}$$

ומכאן נובע ש־

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{G(x)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= g'(f(x_0)) f'(x_0). \end{aligned}$$

תרגיל 5.26 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. תהיי פונקציה f המוגדרת וגזירה בקטע סגור $[a,b]$. הוכיחו כי f מונוטונית עולה אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$.
2. תהיי פונקציה f המוגדרת וגזירה על כל הישר הממשי. הוכיחו כי f מונוטונית עולה אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון:

1. נוכיח תחילה את הכיוון הראשון. נניח כי הפונקציה היא מונוטונית עולה ונשתמש בהגדרת הנגזרת

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

נסתכל על הגבולות החד־צדדיים.

$$\begin{aligned}f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}&\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\\ &"\frac{+}{+}"\geq 0.\end{aligned}$$

וכן,

$$\begin{aligned}f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}&\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\\ &"\frac{-}{-}"\geq 0.\end{aligned}$$

ואם הנקודה היא אחת מקצוות הקטע אז רק גבול אחד קיים. קיבלנו שהנגזרת היא אי־שלילת בקטע. מה שמוכיח את הכיוון הראשון. נניח כעת שההגזרת היא אי־שלילת בקטע. יהיו $x<y$ שתי נקודות בקטע הסגור. נוכיח ש־ $f(x)\leq f(y)$. ממשפט לגראנג' נובע שקיימת נקודה $x<c<y$ כך ש־

$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}&=f'(c)\geq 0\\ f(y)\geq&f(x)\end{aligned}$$

לאחר הכפלה במכנה החיובי נקבל את התוצאה הנדרשת.

2. נניח כי הנגזרת היא אי־שלילית בכל הישר ונוכיח כי לכל $x<y$ מתקיים ש־ $f(x)\leq f(y)$. נבחר קטע $[a,b]$ כך ש־ $x,y\in[a,b]$. נשתמש בסעיף א', כאשר כל תנאיו מתקיימים, ונקבל את התוצאה הנדרשת. נניח כעת שהפונקציה מונוטונית עולה בכל נקודה ונראה שהנגזרת היא גדולה או שווה לאפס בכל נקודה. תהיי נקודה $x\in\mathbb{R}$. נבחר קטע סגור כאשר הנקודה x מוכלת בו ואיננה נקודת קצה שלו ונשתמש שוב בסעיף א'. מסעיף א' ומההנחה נובעת שהפונקציה עולה בקטע ולכן בפרט הנגזרת בנקודה הנבחרת היא אי־שלילית, כנדרש.

5.4.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 5.27 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו כי $f(x)=\arctan(x)$ פונקציה גזירה בכל הישר וכי $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
2. הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$.

פתרון:

1. נשים לב ש־$f^{-1}(x)=\tan(x)$ ואנו יודעים שהנגזרת של פונקציה הפוכה היא

$$f'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}= \\ =\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}},$$

כאשר השתמשנו בנוסחה של נגזרת של $\tan(x)$.

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}=\frac{\cos^2(\arctan(x))+\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}= \\ =1+\tan^2(\arctan(x))= \\ =1+x^2,$$

ולכן

$$.f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

נשים לב שקיום הנגזרת נובע ישירות ממשפט עבור הנגזרת של פונקציה הפוכה שאומר שהפונקציה ההפוכה קיימת אם הנגזרת של הפונקציה המקורית קיימת ולעולם לא מתאפסת ואכן

$$.\left(\tan(x)\right)'=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

2. יהי $\epsilon>0$. נבחר $0<\delta=\epsilon^2$ ונסתכל על x כך ש־ $0<x<\delta$. נשים לב ש־

$$0<x<\delta \\ 0<\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\epsilon$$

בשל מונוטוניות פונקציית השורש. לכן

$$\begin{aligned}|f(x)-L| &= \left|\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| = \\ &= \left|\sqrt{x}\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \le \\ &= \left|\sqrt{x}\right|\cdot 1 = \sqrt{x} < \epsilon,\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 5.28 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. תהיי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[1,9]$ וגזירה בקטע $(1,9)$. נניח בנוסף שמתקיימים התנאים הבאים: $f(1)=20,\ f(9)=68$ ו־$|f'(x)|\le 6$ לכל $x\in(1,9)$. הוכיחו כי $f(7)=56$.
2. מצאו את האסימפטוטות האנכיות (אם קיימות) של הפונקציה הבאה $f(x) = (2-x)^{\frac{x-3}{1-x}}$.

פתרון:

1. הפונקציה רציפה וגזירה ולכן נשתמש במשפט לגראנג' עבור הקטע $[7,9]$ ועבור הקטע $[1,7]$ בנפרד. לפי משפט לגראנג' קיימת נקודה $c_1\in[7,9]$ כך ש־

$$\begin{aligned}\frac{f(9)-f(7)}{9-7} &= f'(c_1)\le 6\\ 68-f(7) &\le 12\\ 56 &\le f(7).\end{aligned}$$

בנוסף, לפי משפט לגראנג' קיימת נקודה $c_2\in[1,7]$ כך ש־

$$\begin{aligned}\frac{f(7)-f(1)}{7-1} &= f'(c_2)\le 6\\ f(7)-20 &\le 36\\ f(7) &\le 56,\end{aligned}$$

ומצירוף האי־שיוונים הנ"ל, נובעת התוצאה.

2. נבחן את הנקודות הבעיתיות מבחינת רציפות שבפונקציה. נשים לב שלכל $x>2$, הבסיס של הפונקציה הוא שלילי, $2-x$, ובנוסף החזקה איננה בהכרח זוגית ולכן הפונקציה לא בהכרח מוגדרת על הממשיים. לכן נבחן את התחום בו $x<2$. בנוסף, הנקודה היחידה בה החזקה איננה מוגדרת, ואף איננה רציפה בה, היא $x=1$. על כן, זו הנקודה היחידה אותה נצטרך לבחון עבור אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to1^+}(2-x)^{\frac{x-3}{1-x}} = \lim_{x\to1^+}e^{\frac{(x-3)\ln(2-x)}{(1-x)}}.$$

נשתמש ברציפות האקספוננט ונחשב את הגבול רק לחזקה.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2-x)}{(1-x)}\underset{L}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{-1}=$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2-x}=1.$$

לכן נובע ש־

$$\lim_{x\to1^+}(2-x)^{\frac{x-3}{1-x}}=\lim_{x\to1^+}e^{\frac{(x-3)\ln(2-x)}{(1-x)}}=$$
$$=e^{(1-3)}.$$

הגבול איננו אינסופי ולכן לפונקציה לא קיימות אסימפטוטות אנכיות.

תרגיל 5.29 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. תהיי פונקציה $f(x)=x^2(\ln(x))^2$.

1. חקרו את הפונקציה ע"פ הקריטריונים הבאים: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון מקומיות, נקודות פיתול ואסימפטוטות אנכיות. שרטטו גרף מקורב של הפונקציה.
2. על סמך החקירה שעשיתם בסעיף א', קבעו לאילו ערכים של M יש למשוואה $f(x)=M$ בדיוק שלושה פתרונות שונים.

פתרון:

1. ננתח על פי הקריטריונים הנתונים.

(א) תחום הגדרה: פונקצית הלוגריתם מוגדרת רק עבור $x>0$ ולכן זהו תחום ההגדרה של הפונקציה הנתונה.

(ב) נקודות חיתוך עם ציר x: נשווה את הפונקציה לאפס ונקבל את הנקודה $x=1$ ולכן $(1,0)$ זו נקודת חיתוך יחידה.

(ג) נקודות חיתוך עם ציר y: לא נוכל להציב $x=0$ מאחר והפונקציה איננה מוגדרת בנקודה.

(ד) נקודות קיצון: הפונקציה היא פונקציה רציפה וגזירה בכל תחום הגדרתה ולכן בכדי למצוא נקודות קיצון, כל מה שצריך זה לגזור את הפונקציה.

$$f'(x)=2x(\ln(x))^2+x^22\ln(x)\frac{1}{x}=$$
$$=2x(\ln(x))^2+2x\ln(x)=2x\ln(x)(\ln(x)+1)$$

נשווה לאפס ונקבל

$$\ln(x)=-1$$
$$x=e^{-1}$$
$$f\left(e^{-1}\right)=e^{-2}\left(\ln\left(e^{-1}\right)\right)^2=$$
$$=e^{-2}$$

ולכן הנקודה היא $\left(e^{-1},e^{-2}\right)$. בנוסף נקבל את הנקודה $x=1$ ולכן יש נקודת קיצון מוחלטת נוספת $(1,0)$. נמצא את הנגזרת השנייה גם כן.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\ln(x)(\ln(x)+1)+2(\ln(x)+1)+2\ln(x) = \\ &= 2\ln^2(x)+6\ln(x)+2. \end{aligned}$$

נציב את הנקודות שקיבלנו ונקבל

$$\begin{aligned} f''\left(e^{-1}\right) &= 2\ln^2\left(e^{-1}\right)+6\ln\left(e^{-1}\right)+2 = \\ &= 2-6+2=-2<0 \end{aligned}$$

ולכן $\left(e^{-1},e^{-2}\right)$ זו נקודת מקסימום מקומית. מנגד עבור הנקודה $(1,0)$ נקבל

$$\begin{aligned} f''(1) &= 2\ln^2(1)+6\ln(1)+2 = \\ &= 0-0+2=2>0 \end{aligned}$$

ולכן זו נקודת מינימום מקומית.

(ה) נקודות פיתול: נסתכל על הנגזרת השנייה ונבדוק מתי הפונקציה עוברת מקעירות לקמירות. נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned} t^2+3t+1=0 \\ t_{1,2} &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4}}{2} = \\ t_{1,2} &= \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

לכן נשווה את התוצאה שקיבלנו ל־$\ln(x)$ ונקבל

$$\begin{aligned} \ln(x_1) &= \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x_1 &= e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}. \\ \ln(x_2) &= \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

לכן אלו שיעורי ה־x של נקודות הפיתול שלנו. נציב חזרה בפונקציה ונקבל את שיעורי ה־y שלהן.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= e^{-3+\sqrt{5}}\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \\ f(x_2) &= e^{-3-\sqrt{5}}\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

(ו) אסימפטוטות אנכיות: בכדי למצוא אסימפטוטות אנכיות נבדוק באילו נקודות הפונקציה איננה רציפה. הנקודה היחידה בה אסימפטוטה כזאת אפשרית היא $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 (\ln(x))^2 = \\ = \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x))^2 .$$

נחשב את הגבול עבור הפונקציה $x\ln(x)$.

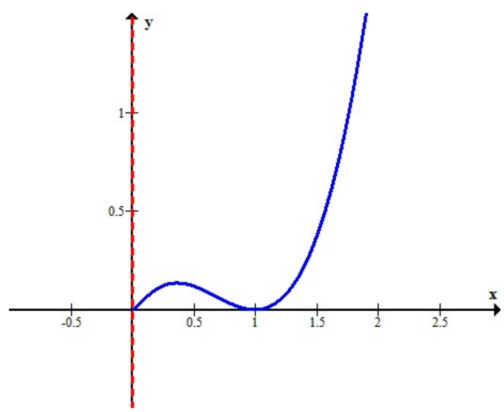
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \\ \underset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ = \lim_{x\to 0^+} -x = 0,$$

ולכן נובע ש־

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x))(x\ln(x)) = 0\cdot 0 = 0.$$

לסיכום, אין אסימפטוטות אנכיות.

(ז) <u>שירטוט של גרף הפונקציה</u>:



איור 22: שרטוט מקורב של גרף הפונקציה $f(x) = x^2\ln^2(x)$

2. אנו רואים כבר מהשרטוט של הפונקציה שעבור כל ערך $0 < M < e^{-2}$ (שזה הגובה המקסימאלי של הפונקציה בקטע $[0,1]$) יש שלושה פתרונות למשוואה.

תרגיל 5.30 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & 0 < x < 1 \\ \frac{\ln(x)}{x-a} & 1 \le x \end{cases}.$$

.

1. מיינו את כל נקודות אי־הרציפות של הפונקציה לפי: אי רציפות סליקה, אי רציפות ממין ראשון ואי רציפות ממין שני. (רמז: חלקו למקרים $a<1,\ a=1,\ a>1$).

2. על סמך סעיף א', קבעו מהם הערכים של a (אם קיימים) שעבורם הפונקציה גזירה בנקודה $x=1$.

פתרון:

1. נשים לב שיש לבחון את הפונקציה כאשר $x\to 0^+$ מאחר ופונקצית הלוגריתם שואפת למינוס אינסוף בנקודה זו. בשלב הבא נחלק את הבעיה למצבים הנתונים ברמז אשר בשאלה.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \\ &\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} -x = 0.\end{aligned}$$

בנוסף, הגבול כאשר $x\to 1^-$ הוא 0. כעת נבחן את הגבול כאשר $x\to 1^+$. נפצל למקרים.

(א) אם $a<1$: אז נקבל

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)}{x-a} = \frac{\ln(1)}{1-a} = 0 .$$

והפונקציה רציפה ב־$x=1$. אין צורך לבחון את המצב כאשר $x\to a$ מאחר ו־$a<1$ והביטוי הנ"ל מייצג את הפונקציה רק כאשר $x\geq 1$. לכן כאשר $a<1$ המכנה לעולם לא מתאפס והפונקציה תמיד רציפה.

(ב) אם $a>1$: נקבל ש־

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)}{x-a} = \frac{\ln(1)}{1-a} = 0 .$$

באותו האופן הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$. לעומת זאת, כאשר $x\to a>1$, אז המכנה מתאפס והמונה סופי ושונה מאפס ולכן הפונקציה שואפת לאינסוף ונקבל שיש במקרה כזה, בנקודה $x=a$, אי רציפות אי סליקה מסוג 2.

(ג) אם $a=1$: נקבל ש־

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)}{x-1} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

וקיבלנו שהפונקציה איננה רציפה בנקודה $x=1$. זוהי אי־רציפות אי סליקה מן הסוג הראשון, מאחר והגבולות החד־צדדיים קיימים וסופיים ושונים זה מזה. למעט זאת, המכנה איננו מתאפס בשום נקודה והמונה סופי בתחום ההגדרה ולכן הפונקציה רציפה ביתר התחום.

2. כאשר $a = 1$ הפונקציה איננה רציפה בנקודה הנתונה ולכן גם לא גזירה שם. כאשר $a > 1$ נקבל שהנגזרות מכל צד הן

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+h)}{1+h-a}-\frac{\ln(1)}{1-a}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h(1+h-a)}=$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{(1+h)}}{(1+2h-a)}=\frac{1}{(1-a)}.$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)\ln(1+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\ln(1+h)+1}{1}=1.$$

הגבולות החד־צדדים המגדירים את הנגזרת שונים זה מזה ולכן הפונקציה איננה גזירה בנקודה. נשים לב שהיינו מקבלים אותו הדבר גם אם $a < 1$ ולכן הפונקציה בכל מקרה איננה גזירה בנקודה.

תרגיל 5.31 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. מצאו את הגבולות החד צדדים של הנגזרת השנייה של הפונקציה

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2(\ln(x)-1)-e^x\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$$

כאשר $x\to 0^+$ ו־$x\to\infty$.

2. הוכיחו כי $\ln(x)>\frac{2(x-1)}{x+1}$ לכל $x>1$.

פתרון:

1. השאלה המקורית שונתה ולכן השאלה החדשה מדברת על חישובי גבול של הנגזרת השנייה. מי שמצא את הגבולות של הפונקציה המקורית ־ התחשבנו בזה. נחשב כל גבול בנפרד. נסתכל על הגבול עבור שני גורמים נפרדים.

$$\lim_{x\to 0^+}e^x\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=e^0\left(1+\frac{0^2}{2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^2(\ln(x)-1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)-1}{\frac{1}{x^2}}=$$
$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2}=0.$$

לכן נקבל ש־

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{2}x^2(\ln(x)-1)-e^x\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot 0-1=-1.$$

כעת נחשב את הגבול השני.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3} &\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^x\frac{x^2}{2}+e^x x}{3x^2} = \\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^x\frac{x^2}{2}+e^x x+e^x x+e^x}{6x} = \\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2e^x+e^x\frac{x^2}{2}+e^x x+2e^x x+2e^x}{6} = \infty \\
\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x)-1)}{x} &\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.
\end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}x^2(\ln(x)-1)-e^x\left(1+\frac{x^2}{2}\right) &= \lim_{x\to\infty}x^3\frac{3}{2}\left[\frac{(\ln(x)-1)}{x}-\frac{e^x}{x^3}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\right] = \\
&= \text{“}\infty\cdot(-\infty)\text{”} = -\infty.
\end{aligned}$$

כעת נמצא את הנגזרת השנייה.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3}{2}2x(\ln(x)-1)+\frac{3}{2}x-e^x\left(1+\frac{x^2}{2}\right)-e^x x = \\
&= 3x(\ln(x)-1)+\frac{3}{2}x-e^x\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right). \\
f''(x) &= 3(\ln(x)-1)+3+\frac{3}{2}-e^x\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-e^x(1+x) = \\
&= 3\ln(x)+\frac{3}{2}-e^x\left(2+2x+\frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

הגבולות הם

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}3\ln(x)+\frac{3}{2}-e^x\left(2+2x+\frac{x^2}{2}\right) &= \lim_{x\to\infty}x^3\frac{3\ln(x)+\frac{3}{2}-e^x\left(2+2x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3} = \\
&= \lim_{x\to\infty}x^3\left[\frac{3\ln(x)}{x^3}+\frac{\frac{3}{2}}{x^3}-\frac{e^x\left(2+2x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}\right] = \\
&= \text{“}\infty\cdot(0+0-\infty)\text{”} = -\infty.
\end{aligned}$$

ובנוסף,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}3\ln(x)+\frac{3}{2}-e^x\left(2+2x+\frac{x^2}{2}\right) &= \lim_{x\to 0^+}3\ln(x)+\frac{3}{2}-e^x\left(2+2x+\frac{x^2}{2}\right) = \\
&= \text{“}-\infty+\frac{3}{2}-1(2+0+0)\text{”} = -\infty.
\end{aligned}$$

2. נגדיר פונקצית עזר $f(x)=\ln(x)-\frac{2(x-1)}{x+1}$. נשים לב ש־ $f(1)=0$ ובנוסף,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}-2\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}= \\ &= \frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}= \\ &= \frac{x^2+2x+1-4x}{(x+1)^2}= \\ &= \frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}= \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

נשים לב ש־$f'(x)>0$ לכל $x>1$ (הן במונה והן במכנה יש רק ביטויים עם חזקה זוגית) ולכן, ע"פ משפט שראינו בכיתה, כאשר $g(x)=0$ זו הפונקציה הקבועה השווה תמיד לאפס, הפונקציה $f(x)>g(x)=0$ לכל $x>1$ כנדרש.

תרגיל 5.32 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי $\lim_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-3x+4}=\frac{1}{4}$.
2. חשבו את הגבול הבא או הוכיחו כי אינו קיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}}.$$

פתרון:

1. יהי $\epsilon>0$. נבחר $0<\delta=\min\left\{1,\frac{4}{6}\epsilon\right\}$ ונסתכל על x כך ש־ $0<|x-3|<\delta$. על כן,

$$\begin{array}{rcl} 3-\delta< & x & <3+\delta \\ -6\le -5-\delta< & x-8 & <-5+\delta\le -4 \\ 0< & |x-8| & <6. \end{array}$$

בנוסף,

$$\begin{aligned} \left|x^2-3x+4\right| &= \left|x^2-3x+2.25+1.75\right| \\ &= \left|(x-1.5)^2+1.75\right| \\ &\ge 1 \end{aligned}$$

על כן,

$$\begin{aligned}
|f(x)-L| &= \left|\frac{2x-5}{x^2-3x+4}-\frac{1}{4}\right| = \\
&= \left|\frac{8x-20-x^2+3x-4}{4(x^2-3x+4)}\right| = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left|\frac{x^2-11x+24}{(x^2-3x+4)}\right| = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\left|\frac{(x-3)(x-8)}{(x^2-3x+4)}\right| = \\
&= \frac{1}{4}\cdot|x-3|\cdot\frac{|x-8|}{|x(x-3)+4|} < \\
&< \frac{1}{4}\cdot\delta\cdot\frac{6}{1}\le\epsilon,
\end{aligned}$$

כנדרש.

2. ננסה לחשב ישירות. תחילה נחשב את הגבולות הבאים.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}} = 2.
\end{aligned}$$

נעזר בזאת בחישוב הבא:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{4}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}\right) = \\
&= \lim_{x\to\infty}x\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}{x} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}{x} = \\
&= \frac{\ln(e)}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ברציפות של פונקצית הלוגריתם וכן באריתמטיקה של גבולות.

6 סדרות

סדרה היא מושג יחסית בסיסי במתמטיקה ובצורה הפשוטה ביותר מדובר ברשימה אינסופית סדורה (ז"א, שיש בה חשיבות לסדר) של מספרים ממשיים. לדוגמא: הסדרה $a_n = n$, כאשר $n = 1, 2, \ldots$ זו סדרה של כל המספרים הטבעיים.

הגדרה 6.1 (סדרה) סדרה $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ זו רשימה סדורה של המספרים הממשיים הבאים:

$$.a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$$

שימו לב שאנו משתמשים בסימון a_n כדי לסמן את האיבר ה־n־י בסדרה.

דוגמה 6.2 להלן מספר מצומצם של סדרות מוכרות.

- סדרה מתחלפת: $a_n = (-1)^{n+1}$. נשים לב שהסימן של הסדרה מתחלף משלילי לחיובי במעבר בין איברים סמוכים. $a_1 = 1,\ a_2 = -1, \ldots$.
- סדרה הנדסית: $a_0 \neq 0$, $0 < q < 1$ והאיבר הכללי הוא $a_n = a_0 q^n$, $n \geq 1$.
- סדרה הרמונית: $a_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1$.

וכן ישנן סדרות רבות נוספות.

הגדרה 6.3 נאמר שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים ש־ $|a_n - L| < \epsilon$. במקרה זה נסמן:

$$.\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

נשים לב שמדובר במושג גבול די דומה למושג שראינו עבור התכנסות של פונקציות. במקום מספר ממשי $x \in \mathbb{R}$ שהיה לנו בפונקציות, אנו עובדים עם מספרים טבעיים $n \in \mathbb{N}$.

תרגיל 6.4 הוכיחו כי הגבול של הסדרה ההרמונית, $a_n = \frac{1}{n}$ הוא 0.

הוכחה: נשתמש בהגדרת הגבול בכדי להוכיח את הטענה. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ ונסתכל על $n \geq N_0$. נשים לב כי $n \geq N_0 \geq \frac{1}{\epsilon}$ ונקבל

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \left|\frac{1}{n} - 0\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{1}{n} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

כנדרש. ■

תרגיל 6.5 הוכיחו כי לסדרה המתחלפת $a_n = (-1)^{n+1}$ לא קיים גבול.

הוכחה: נשתמש בהגדרת הגבול בכדי להוכיח את הטענה. נניח בשלילה שקיים גבול L כלשהו. נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$. לפי הגדרת הגבול קיים $N_0 \geq 1$ כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$. נסתכל על $n = 2N_0$ ו־ $n = 2N_0 + 1$. לפי הנתון מתקיים ש־

$$|a_{2N_0} - L| = \left|(-1)^{2N_0+1} - L\right| = |-1 - L| = |1 + L| < \epsilon = \frac{1}{2},$$
$$|a_{2N_0+1} - L| = \left|(-1)^{2N_0+1+1} - L\right| = |1 - L| < \epsilon = \frac{1}{2}.$$

לכן נקבל,

$$-\frac{1}{2} < 1 + L < \frac{1}{2},$$
$$-\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2}.$$

מכאן נובע

$$-\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2},$$
$$-\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2}.$$

נכפול את האי־שיוויון השני ב־(-1) ונקבל

$$\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2},$$

בסתירה לאי־שיוויון הראשון שאומר ש־ $L < -0.5$. ■

משפט 6.6 (הלמה של היינה) תהיי פונקציה f המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 (אולי פרט לנקודה עצמה). הגבול של הפונקציה f כאשר $x \to x_0$ הוא L $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, אם ורק אם עבור כל סדרה $(a_n)_{n\geq k}$ של מספרים המתכנסת ל־x_0 מתקיים שהסדרה $(f(a_n))_{n\geq k}$ מתכנסת ל־L.

במילים אחרות, ניקח סדרה של נקודות שמתכנסת ל־x_0. נסמן את הסדרה הזאת ב־$(a_n)_{n\geq k}$. אם הסדרה $(f(a_n))_{n\geq k}$ מתכנסת ל־L (זו הסדרה של ערכי הפונקציה בנקודות שמתכנסות ל־x_0) אזי הגבול של הפונקציה בנקודה x_0 הוא L.

הערה 6.7 שימו לב! הלמה של היינה נכונה גם במקרה בו הגבול הוא אינסופי. כמו כן, השימוש בה הוא מיידי לכל חישובי גבולות של סדרות. בכל פעם בה נרצה לחשב גבול של סדרה, נגדיר פונקצית עזר. נבדוק את הגבול של הפונקציה וממנו נסיק לגבי הגבול של הסדרה. במילים אחרות, במידה ונרצה לחשב את הגבול של הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$, נגדיר פונקציה $f(x)$ כך ש־ $f(n) = a_n$. נחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ והלמה של היינה קובעת כי גם הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (f(n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־L.

תרגיל 6.8 חשבו את הגבול של הסדרה עם האיבר הכללי $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

פתרון: נגדיר פונקצית עזר $f\left(x\right)=\frac{\ln(x)}{x}$. נסתכל על הגבול של הפונקציה כאשר $x\to\infty$ ונקבל ש־

$$\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x\right)}{x}= ,$$
$$\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

ולכן לפי ההערה הקודמת נובע שהגבול של הסדרה הנתונה הוא 0.

הערה 6.9 שימו לב! אין כזה דבר רציפות, גזירות, או כלל לופיטל כאשר מדובר בסדרות. בסדרות המושגים הללו לא קיימים ולכן לעולם אין להשתמש בהם כאשר דנים בסדרות, אלא רק כאשר דנים בפונקציות!!!

טענה 6.10 ישנן מספר טענות שמתקיימות הן בפונקציות והן בסדרות. ההוכחה של הטענות הללו זהה בשני המקרים.

1. בדומה לפונקציות, גם בסדרות הגבול הוא יחיד. זאת אומרת, אם נתון שהסדרה מתכנסת ל־L וגם מתכנסת ל־L' , אזי $L=L'$, אחרת הסדרה איננה סדרה מתכנסת.
2. משפט הסנדביץ' על גירסותיו השונות תקף גם לסדרות. זאת אומרת, אם יש סדרה שחסומה בין צמד סדרות אחרות וצמד הסדרות הללו מתכנס לאותו הגבול אז גם הסדרה החסומה מתכנסת לגבול זה.

6.1 אריתמטיקה של סדרות מתכנסות

בדומה לאריתמטיקה של גבולות ואריתמטיקה של נגזרות שראינו בעבר, גם סדרות מתכנסות מקיימות כללי אריתמטיקה דומים. תהיינה 2 סדרות $\left(a_n\right)_{n=k}^{\infty},\left(b_n\right)_{n=k}^{\infty}$ המתכנסות ל־A,B בהתאמה.

- $\lim_{n\to\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=A\pm B$.
- $\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=A\cdot B$.
- אם $b_n\neq0,B\neq0$ לכל n אזי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{A}{B}$.

הגדרה 6.11 (מונוטוניות של סדרות) תהי סדרה$\left(a_n\right)_{n=k}^{\infty}$. אם $a_n\leq a_{n+1}$ לכל $n\geq k$ אזי הסדרה היא מונוטונית עולה. אם $a_n\geq a_{n+1}$ לכל $n\geq k$ אזי הסדרה היא מונוטונית יורדת.

בדומה לפונקציות, סדרות יכולות להיות חסומות.

הגדרה 6.12 (חסימות של סדרות) תהי סדרה$\left(a_n\right)_{n=k}^{\infty}$. אם קיים קבוע M כך ש־ $a_n\leq M$ לכל $n\geq k$ אזי הסדרה היא חסומה מלעיל (חסומה מלמעלה). אם $a_n\geq M$ לכל $n\geq k$ אזי הסדרה היא חסומה מלרע (חסומה מלמטה).

משפט 6.13 תהי סדרה $\left(a_n\right)_{n=k}^{\infty}$.

- אם הסדרה חסומה מלעיל ומונוטונית עולה, אזי הסדרה מתכנסת לגבול L המקיים - $L \leq M$.
- אם הסדרה חסומה מלרע ומונוטונית יורדת, אזי הסדרה מתכנסת לגבול L המקיים - $L \geq M$.

הלמה הבאה מכלילה את המשפט הקודם עבור פונקציות.

למה 6.14 תהיי פונקציה f המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 (אולי למעט הנקודה עצמה). נניח כי f מונוטונית עולה וחסומה מלעיל בסביבה של x_0, אזי לפונקציה קיים גבול L בנקודה x_0.

הלמה האחרונה נכונה גם במידה ולא מדובר בנקודה x_0 סופית, אלא כאשר הפונקציה היא מונוטונית עולה וחסומה בכל תחום ההגדרה שלה ובפרט כאשר $x \to +\infty$.

טענה 6.15 תהיי סדרה $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ ונגדיר על בסיסה צמד תתי סדרות $(a_{2n})_{n=k}^{\infty}$ ו- $(a_{2n+1})_{n=k}^{\infty}$. אם הגבול של $(a_{2n})_{n=k}^{\infty}$ הוא a והגבול של $(a_{2n+1})_{n=k}^{\infty}$ הוא b אזי הסדרה המקורית מתכנסת אם ורק אם $a = b$.

הטענה למעשה אומרת שסדרה מתכנסת לגבול מסויים אם ורק אם כל תת סדרה (זאת אומרת, כל סדרת שאיבריה נקלחים מהסדרה המקורית בסדר המקורי) גם מתכנסת לאותו הגבול.

תרגיל 6.16 קבעו האם הסדרות הבאות מתכנסות או לא. הוכיחו את טענותיכם.

- $a_n = \frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+n}$, $n \geq 1$.
- $a_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \geq 1$.

פתרון: נתחיל בסדרה עם האיבר הכללי $a_n = \frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+n}$. נראה תחילה שהסדרה היא מונוטונית עולה מאחר ו- $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}+n+1}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+n} \leq \\
&\leq \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

ולכן הסדרה חסומה מלעיל וע"פ משפט שראינו היא מתכנסת.

הסדרה השנייה איננה מתכנסת ובכדי להוכיח זאת נניח שהיא מתכנסת. נשים לב ש־

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} \cos(2\pi k) = 1 & n = 4k \\ \cos(\pi) = -1 & n = 4k+2 \\ \cos\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 0 & n = 2k+1 \end{cases}$$

ואנו רואים שיש לסדרה לפחות 2 תתי־סדרות שכל אחת מהן מתכנסת לגבול אחר. לכן בפרט הסדרה לא מתכנסת (אנו משתמשים בטענה שאומרת שאם הסדרה מתכנסת אז גם כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול).

תרגיל 6.17 נתון $a_1 = 1$ ו־ $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$ לכל $n \geq 1$ שלם. ענו על הסעיפים הבאים:

1. הוכיחו באינדוקציה כי $a_n \geq 0$.
2. הוכיחו באינדוקציה כי a_n מונוטונית יורדת.
3. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון:

1. בסיס האינדוקציה עבור $n = 1$ הוא מיידי. נניח כי $a_n \geq 0$ ונראה ש־ $a_{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} a_n &\geq 0 \\ 0 &\geq -a_n \\ e^0 &\geq e^{-a_n} \\ 1 - a^{-a_n} &\geq 1 - e^0 = 0 \\ a_{n+1} &\geq 0. \end{aligned}$$

והטענה נובעת.

2. קל לראות ש־ $a_2 = 1 - e^{-a_1} = 1 - e^{-1} < 1 = a_1$. נניח ש־ $a_{n+1} \leq a_n$ ונוכיח ש־ $a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n+1} \\ -a_{n+1} &\geq -a_n \\ e^{-a_{n+1}} &\geq e^{-a_n} \\ 1 - a^{-a_n} &\geq 1 - e^{-a_{n+1}} \\ a_{n+1} &\geq a_{n+2}. \end{aligned}$$

3. הסדרה היא חסומה מלמטה ומונוטונית לא עולה ולכן קיים לה גבול. נסמן את הגבול הזה ב־L. נשים לב ש־

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= L \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-a_n} = 1 - e^{-L} \end{aligned}$$

ובנוסף, הגובל הנ"ל שווים ולכן מתקיים ש־

$$.L=1-e^{-L}$$

בגלל החסמים על הסדרה אנו יודעים ש־ $0\leq L\leq 1$. נוכל כעת להגדיר פונקצית עזר $f(x)=1-e^{-x}-x$ ולבחון מתי הפונקציה בקטע המדובר. באופן מיידי נשים לב ש־ $f(0)=0$ ולכן $L=0$.

תרגיל 6.18 חשבו את הגבול של הסדרה

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n^7}=?$$

פתרון: נשתמש ופונקציה $f(x)=\frac{7^x}{x^7}$ בכדי לחשב את הגבול הנ"ל.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{7^x}{x^7} &\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{7^x\ln(7)}{7x^6}= \\ &\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{7^x\ln^2(7)}{7\cdot 6x^5}= \\ &\vdots \\ &\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{7^x\ln^7(7)}{7!}=\infty\end{aligned}$$

ולכן הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n^7}=\infty$.

תרגיל 6.19 הוכיחו או הפריכו:

1. תהי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתון כי הסדרה $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ז"א $\lim_{n\to\infty}f(n)=L$, אזי $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$.
2. תהיי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־ $f(n)=a_n$ ובנוסף $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$. אזי גם הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(f(n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־L.
3. אם הסדרה $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ מתכנסת ל־L, אזי הסדרה $(|a_n|)_{n=k}^{\infty}$ מתכנסת ל־ $|L|$.
4. לסדרה שמקיימת את הנוסחה הרקורסיבית $a_{n+1}=\frac{5(a_n-1)}{a_n+5}$ יש גבול.

פתרון: נענה על כל סעיף בנפרד תוך שימוש בטענות ומשפטים שראינו עד כה.

1. המשפט אינו נכון. המשפט ההפוך הוא נכון וראינו אותו קודם לכן אך המשפט הנוכחי ־ לא. ניתן דוגמא נגדית למשפט הנתון. תהי פונקציה $f(x)=\cos(2\pi x)$. אנו יודעים שזו פונקציה ללא גבול כאשר $x\to\infty$, אבל מצד שני, הסדרה $(\cos(2\pi n))_{n=1}^{\infty}$ זו הסדרה הקבועה $(1,1,1,\dots)$ ובפרט יש לה גבול $L=1$.

2. הטענה נכונה ונוכיח זאת. יהי $\epsilon > 0$. מהגדרת הגבול עבור פונקציות, נובע שקיים M כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$. נבחר $N_0 = \lceil M \rceil$. נסתכל על $n \geq N_0 + 1$ שלם כלשהו. אזי

$$|a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon$$

לפי האי־שיוויון הקודם ולכן הטענה נובעת.

3. הטענה נכונה ונוכיח אותה. יהי $\epsilon > 0$ נרצה למצוא $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ מתקיים $||a_n| - |L|| \leq \epsilon$. מאחר והסדרה המקורית מתכנסת קיים N_0 כך ש־ $|a_n - L| \leq \epsilon$ לכל $n > N_0$. נשתמש באי־שיוויון המשולש ההפוך ונקבל

$$||a_n| - |L|| \quad \leq \quad |a_n - L| < \epsilon$$

כנדרש.

4. נניח בשלילה שיש לסדרה גבול. אזי נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. נשתמש באריתמטיקה של גבולות,

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{5(a_n - 1)}{a_n + 5} = \\ &= \frac{5(a-1)}{a+5} \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\begin{aligned} a(a+5) &= 5(a-1) \\ a^2 + 5a &= 5a - 5 \\ a^2 &= -5 \end{aligned}$$

סתירה.

תרגיל 6.20 חשבו את הגבול של הסדרה $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$.

פתרון: נשתמש במשפט הסנדביץ'.

$$a_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq \frac{2}{1} \cdot 1^{n-2} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

לכן נקבל שהסדרה הנתונה חסומה בין הסדרות $b_n = \frac{4}{n}$ ו־$c_n = 0$. שתי הסדרות הללו שואפות לאפס ולכן הגבול של הסדרה המקורית הוא גם כן 0.

תרגיל 6.21 הוכיחו כי הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה ל־e .

פתרון: נוכיח שהסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה ומאחר ואנו יודעים שהיא שואפת ל־e אז הטענה מתקיימת. נוכיח זאת בכך שנראה כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. נצא מאגף שמאל ונבצע

מכנה משותף במונה ובמכנה.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{(n+2)\,n}{(n+1)\,(n+1)}\right)^{n} = \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n} = \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n} \geq \\
&\geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1}\right) = \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right) = \\
&= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באי־שוויון ברנולי במהלך החישוב. הסדרה היא מונוטונית עולה ומכאן הטענה נובעת.

6.2 סדרות סכומים חלקיים

סדרות ספציפיות בהן נעזר רבות הן סדרות של סכומים חלקיים. סדרות אלו יסייעו לנו בחישוב הסכום של הסדרה המקורית.

הגדרה 6.22 (סדרת סכומים חלקיים) תהיי סדרת מספרים $(a_n)_{n=k}^{\infty}$. סדרת הסכומים החלקיים של a_n המסומנת ב־$(S_n)_{n=k}^{\infty}$ מוגדרת על ידי

$$S_k = a_k$$

$$.S_N = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_N = \sum_{n=k}^{N} a_n$$

שימו לב שבאופן כזה ניתן לקבוע ש־ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$ ובכך נקבל דרך לחשב סכומים של סדרות.

תרגיל 6.23 תהי סדרה הנדסית $a_0 \neq 0$, $0 < q < 1$ והאיבר הכללי הוא $a_n = a_0q^n$, $n \geq 1$. מצאו את הסכום של הסדרה בעזרת סדרת הסכומים החלקיים.

פתרון: נשים לב למשוואות הבאות.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} a_0 q^n \\ S_{N+1} &= \sum_{n=1}^{N+1} a_0 q^n = S_N + a_0 q^{N+1} \\ qS_N + a_0 q &= q\sum_{n=1}^{N} a_0 q^n + a_0 q = \sum_{n=1}^{N} a_0 q^{n+1} + a_0 q = \\ &= a_0 q^2 + a_0 q^3 + \ldots a_0 q^{N+1} + a_0 q = S_{N+1} \end{aligned}$$

לכן קיבלנו את הזהות

$$\begin{aligned} S_N + a_0 q^{N+1} &= S_{N+1} = qS_N + a_0 q \\ S_N + a_0 q^{N+1} &= qS_N + a_0 q \\ S_N (1-q) &= a_0 q - a_0 q^{N+1} \\ S_N &= \frac{a_0 q - a_0 q^{N+1}}{1-q} = a_0 q \frac{1-q^N}{1-q} = a_1 \frac{1-q^N}{1-q} \end{aligned}$$

וקיבלנו שהסכום החלקי עד האיבר ה־N הוא האיבר הראשון a_1 כפול $\frac{1-q^N}{1-q}$. נסתכל על הגבול כאשר $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} a_1 \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

נובע מכך ש־ $0 < q < 1$.

תרגיל 6.24 תהיי סדרה מתחלפת $a_n = (-1)^n$ לכל $n \geq 1$ שלם. השתמשו בסדרת הסכומים החלקיים של הסדרה המתחלפת בכדי למצוא את הסכום של הסדרה.

פתרון: את סדרת הסכומים החלקיים נוכל לרשום מפורשות מאחר ואיננה מסובכת לחישוב. האיבר הראשון בסדרה $S_1 = a_1 = -1$. האיבר השני בסדרה הוא $S_2 = a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0$. ובאופן כללי נקבל ש־

$$.S_N = \begin{cases} 0 & N\ is\ even,\ N = 2k,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ -1 & N\ is\ odd,\ N = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

לכן נשים לב שהסכום של הסדרה המקורית לא קיים וזה מאחר וסדרת הסכומים החלקיים היא סדרה שנע מ־0 ל־1 בכל הציר הממשי וכבר ראינו שבמצבים כאלה אין התכנסות.

תרגיל 6.25 תהיי סדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ הנתונה על ידי הנוסחה $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. השתמשו בסדרת הסכומים החלקיים של הסדרה המתחלפת בכדי למצוא את הסכום שלה.

פתרון: לפני שנרשום את סדרת הסכומים החלקיים נבצע מניפולציה קטנה לסדרה בכדי לרשום אותה בצורה נוחה יותר.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\left(n+1\right)} = \frac{1+n-n}{n\left(n+1\right)} = \\ &= \frac{1+n}{n\left(n+1\right)} - \frac{n}{n\left(n+1\right)} = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

כעת נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים $(S_N)_{N\geq 1}$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-1} + a_N = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N-1+1} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}, \end{aligned}$$

כאשר קיבלנו את התוצאה הנ"ל בגלל שהרבה איברים התקזזו בשל הסימנים המנוגדים. נחשב את הגבול ונקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

7 אינטגרלים

אינטגרציה היא למעשה הפעולה ההפוכה לגזירה מבחינות מסויימות, ויחד עם זאת לעיתים קרובות נחשבת להרבה יותר מסובכות. אנחנו מתחילים במספר חישובים והגדרות בסיסיות הנוגעות לאינטגרציה אשר ימחישו בצורה מיטבית את הקשר בינה לבין פעולת הגזירה.

7.1 אינטגרלים לא מסויימים

הגדרה 7.1 פונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בקטע E אם $F(x)$ גזירה בקטע זה ובנוסף $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in E$.

פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בכל קטע יכולה להיקבע עד כדי קבוע. זה קורה מהסיבה הפשוטה שההגדרה קובעת שהקדומה היא פונקציה אשר הנגזרת שלה שווה ל-$f(x)$ ולכן ניתן להוסיף לקדומה כל מספר קבוע וזה עדיין יהיה נכון (קבועים נופלים במהלך גזירה). לכן בעת אינטגרציה לא מסויימת תמיד ייתווסף לנו קבוע כללי כלשהו.

נתחיל במספר תרגילים / נוסחאות לאינטגרלים מוכרים.

תרגיל 7.2 חשבו את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

$$\begin{aligned}
1.\quad \int \sin(x)\,dx &= -\cos(x)+C\\
2.\quad \int \cos(x)\,dx &= \sin(x)+C\\
3.\quad \int x^{a}(x)\,dx &\underset{a\neq -1}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}+C\\
4.\quad \int \frac{1}{x}dx &= \ln|x|+C\\
5.\quad \int \frac{1}{1+x^{2}}dx &= \arctan(x)+C
\end{aligned}$$

למה מופיע ערך מוחלט בנוסחה? נשים לב לתכונה הבאה.

$$\ln|x|=\begin{cases}\ln(x) & x>0\\ \ln(-x) & x<0\end{cases}$$

לכן

$$(\ln|x|)'=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ \frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$$

7.1.1 כללי אינטגרציה בסיסיים

ישנן מספר תכונות בסיסיות באינטגרציה שנובעות ישירות מכללי הגזירה.

- $\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$.
- $\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$.
- $\left[\int f(x)\,dx\right]'=f(x)$.
- $\int [f(x)]'\,dx=f(x)$.

ההסברים לכך הם די פשוטים. ניקח לדוגמא את השוויון הראשון ־ יכולנו לפצל את האינטגרל שבאגף ימין לשני אינטגרלים שונים בגלל כללי גזירה של סכום. באופן מפורש, אם $F(x)=\int f(x)\,dx$ ו־ $G(x)=\int g(x)\,dx$ אזי

$$[G(x)+F(x)]' = g(x)+f(x)$$

לכן

$$\int [G(x)+F(x)]'\,dx = \int (g(x)+f(x))\,dx$$

נשתמש בשיוויון האחרון להחלפת אגף שמאל במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} G(x)+F(x) &= \int (g(x)+f(x))\,dx \\ \int g(x)\,dx+\int f(x)\,dx &= \int (g(x)+f(x))\,dx. \end{aligned}$$

7.1.2 אינטגרציה בחלקים

נוסחת אינטגרציה בחלקים היא נוסחה די פשוטה הנובעת ישירות מנוסחת הנגזרת של מכפלה של פונקציות. יהיו פונקציות $f(x)$, $g(x)$ גזירות בקטע E. אזי, לפי כללי הגזירה המוכרים נקבל ש־

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x).$$

נעביר אגפים ונבצע אינטגרציה על שני האגפים במקביל

$$\begin{aligned} \int f'(x)\,g(x)\,dx &= \int (f(x)\,g(x))'\,dx-\int f(x)\,g'(x)\,dx \\ &= f(x)\,g(x)-\int f(x)\,g'(x)\,dx \end{aligned}$$

7.1.3 שיטת ההצבה

ישנה טכניקה מוכרת בפתרון אינטגרלים והיא החלפת משתנים. נבחן בקצרה את התיאוריה שעומדת מאחורי טכניקה זו.

תהיי פונקציה $F(x)$ כך ש־ $F'(x)=f(x)$. נניח שאנחנו מעוניינים לרשום את x כ־ $x=g(y)$. כעת נשים לב לפונקציה המתקבלת $F(g(y))$ ולגזירה שלה.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left[F(g(y))\right] &= F'(g(y))\,g'(y)=f(g(y))\,g'(y)\\ \int\frac{d}{dy}\left[F(g(y))\right]dy &= \int f(g(y))\,g'(y)\,dy\end{aligned}$$

נשים לב שאגף שמאל מקיים את הזהות $\int\frac{d}{dy}\left[F(g(y))\right]dy=F(g(y))=F(x)$ לכן,

$$\int f(x)\,dx=F(x) = \int f(g(y))\,g'(y)\,dy,$$

וקיבלנו את נוסחת ההצבה. כאשר מחליפים $x=g(y)$ מחליפים את dx ב־ $g'(y)\,dy$.
דרך נוספת לבחון את זה היא על ידי הגדרת $y=f(x)$ ולגזור את y לפי x ולקבל

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$
$$dy=f'(x)\,dx.$$

תרגיל 7.3 חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=?$ (החלפת משתנים).
2. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=?$ (החלפת משתנים).
3. $\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=?$ (החלפת משתנים).
4. $\int\frac{x}{1+x^2}dx=?$ (זיהוי נגזרת פנימית).
5. $\int x^3\sin^2\left(x^2\right)dx=?$ (החלפת משתנים ואינטגרציה בחלקים).
6. $\int\sin(x)\sin(3x)\,dx=?$ (אינטגרציה בחלקים).
7. $\int\ln(x)\,dx=?$ (הוספת קבוע).
8. $\int\tan(x)\,dx=?$ (החלפת משתנים).

פתרון:

$$\begin{aligned}1.\quad \int\frac{1}{a^2+x^2}dx &= \int\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\\ &\underset{x=ay,\ dx=ady}{=} \frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{ay}{a}\right)^2}a\,dy=\\ &= \frac{a}{a^2}\int\frac{1}{1+y^2}dy=\\ &= \frac{1}{a}\arctan(y)+C=\\ &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C\end{aligned}$$

2. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \underset{f(x)=y,\ dy=f'(x)dx}{=} \int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C = \ln|f(x)| + C$$

3. $$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx &\underset{e^{2x}=y,\ \frac{dy}{dx}=2e^{2x}}{=} \int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = \\ &= \int \frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{dy}{2y} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}dy = \\ &= \frac{1}{2}\arctan(y) + C \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right) + C \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\int x^3 \sin^2\left(x^2\right) dx & \underset{y=x^2,\ dy=2xdx}{=} \int y \sin^2(y) \frac{dy}{2x} = \\ & = \frac{1}{2}\int y \sin^2(y)\, dy = \\ & = \frac{1}{2}\int y \cdot \frac{1-\cos(2y)}{2} dy = \\ & = \frac{1}{4}\int y dy - \frac{1}{4}\int y \cdot \cos(2y)\, dy = \\ & \underset{t=2y,\ dt=2dy}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{t}{2}\cdot\cos(t)\,\frac{dt}{2} = \\ & = \frac{x^4}{8} - \frac{1}{16}\int t\cdot\cos(t)\, dt = \\ & = \frac{x^4}{8} - \frac{1}{16}\left[t\sin(t) - \int \sin(t)\, dt\right] = \\ & = \frac{x^4}{8} - \frac{1}{16}\left[t\sin(t) + \cos(t)\right] + C = \\ & = \frac{x^4}{8} - \frac{1}{16}\cdot 2y\sin(2y) - \frac{1}{16}\cos(2y) + C = \\ & = \frac{x^4}{8} - \frac{1}{8}x^2\sin\left(2x^2\right) - \frac{1}{16}\cos\left(2x^2\right) + C\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}\int \sin(x)\sin(3x)\, dx & = -\cos(x)\sin(3x) + 3\int \cos(x)\cos(3x)\, dx = \\ & = -\cos(x)\sin(3x) + 3\left[\sin(x)\cos(3x) + 3\int \sin(x)\sin(3x)\, dx\right] = \\ & = -\cos(x)\sin(3x) + 3\sin(x)\cos(3x) + 9\int \sin(x)\sin(3x)\, dx \\ -8\int \sin(x)\sin(3x)\, dx & = -\cos(x)\sin(3x) + 3\sin(x)\cos(3x) \\ \int \sin(x)\sin(3x)\, dx & = \frac{1}{8}\cos(x)\sin(3x) - \frac{3}{8}\sin(x)\cos(3x)\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\int \ln(x)\, dx & = \int 1\cdot\ln(x)\, dx = \\ & = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = \\ & = x\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
8. \quad \int \tan(x)\,dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \\
&\underset{\cos(x)=y,\quad dy=-\sin(x)dx}{=} \int \frac{\sin(x)}{y}\cdot\left(-\frac{dy}{\sin(x)}\right) = \\
&= -\int \frac{dy}{y} = \\
&= -\ln|y| + C = \\
&= -\ln|\cos(x)| + C
\end{aligned}
$$

7.2 פירוק פולינומים

לעיתים קרובות אנחנו נתקל במצב בו יש לנו אינטגרל על מנה של פולינומים $\frac{p(x)}{q(x)}$ (פולינום במונה ופולינום במכנה). במקרים כאלה נרצה לפשט את הבעיה ולהביא אותו למצב מוכר ופשוט יחסית של פולינומים ממעלה ראשונה או שנייה. לשם כך נצטרך לבצע פירוק של הפולינומים במונה ובמכנה. נעבור כעת על מספר דוגמאות / טכניקות לבצע פירוק זה באמצעות דוגמאות. הנקודה החשובה הראשונה שצריכים לשים אליה לב היא לאיזה מהפולינומים ישנה חזקה גדולה יותר (בהתאם לכך נדע למה להשוות אותם). באופן כללי ולרוב הפירוק יתבצע לשברים בהם החזקה של המכנה גדולה מהחזקה של המונה.

- אם הפונקציה הרציונאלית היא מהצורה $\frac{a}{bx^2+cx+d}$ ואת המכנה ניתן לרשום כ־ $(Ax+B)(Cx+D)$ אז נחפש פירוק מהצורה $\frac{E}{Ax+B}+\frac{F}{Cx+D}$.
- אם הפונקציה הרציונאלית היא מהצורה $\frac{ax+e}{bx^2+cx+d}$ ואת המכנה ניתן לרשום כ־ $(Ax+B)(Cx+D)$ אז נחפש פירוק מהצורה $\frac{E}{Ax+B}+\frac{F}{Cx+D}$.
- אם בפונקציה הרציונאלית הדרגה של המונה גדולה או שווה לדרגה של המכנה אז בפירוק נוסיף איבר נוסף, פולינום $r(x)$, שאינו מחולק בפולינום אחר .

תרגיל 7.4 פתרו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int \frac{1}{x^2-1}dx = ?$ (פירוק פולינומים).
2. $\int \frac{2x^4}{1+x^2}dx = ?$ (הוספה וחיסור של קבוע).
3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = ?$ (החלפת משתנים).
4. $\int \sin^5(x)\cos(x)\,dx = ?$ (החלפת משתנים).
5. $\int \frac{3x^2+9x-6}{x^2-1}dx = ?$ (פירוק פולינומים).

פתרון: נפתור כל אינטגרל בטכניקה שמתאימה לו. שימו לב שאין בהכרח רק דרך אחת לפתור כל אינטגרל ולכן ניתן לנסות מספר דרכים שונות וכולן יעבדו. אנחנו נשתדל להציג כמה שיותר שיטות לפתרון אינטגרלים מהצורות הנ"ל בכדי לרכוש מספר רב של כלים לפתרון אינטגרלים באופן כללי.

$$
\begin{aligned}
1.\ \int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx \\
\frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \\
\frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} \\
1 &= Ax+A+Bx-B \\
1 &= x(A+B)+A-B \\
\Rightarrow\ A-B &= 1 \\
A+B &= 0 \\
\Rightarrow\ A &= \frac{1}{2} \\
B &= -\frac{1}{2} \\
\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx &= \int \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ \int \frac{2x^4}{1+x^2}dx &= 2\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \\
&= 2\int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx = \\
&= 2\left[\int \frac{x^4-1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \\
&= 2\left[\int \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{1+x^2}dx + \arctan(x) + C\right] = \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan(x) + C\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &\underset{\sqrt{x}=y,\ dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}}{=} \int e^y 2dy = \\
&= 2e^y + C = \\
&= 2e^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}
$$

$$4. \quad \int \sin^5(x)\cos(x)\,dx \underset{\sin(x)=y,\ \cos(x)dx=dy}{=} \int y^5 dy =$$
$$= \frac{y^6}{6} + C =$$
$$\frac{\sin^6(x)}{6} + C$$

$$
\begin{aligned}
5. \quad \int \frac{3x^2+9x-6}{x^2-1}dx &= 3\int \frac{x^2+3x-2}{x^2-1}dx = \\
&= 3\int \frac{x^2-1+3x-1}{x^2-1}dx = \\
&= 3\int \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{3x-1}{x^2-1}dx = \\
&= 3\int 1 + \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}dx = \\
&= 3x + 3\int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}dx \\
\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} &= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} \\
\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} &= \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)} \\
3x-1 &= x(A+B) - A + B \\
\Rightarrow A+B &= 3 \\
-A+B &= -1 \\
\Rightarrow \quad B &= 1 \\
A &= 2 \\
\int \frac{3x^2+9x-6}{x^2-1}dx &= 3x + 3\int \frac{2}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)}dx = \\
&= 3x + 6\ln(|x+1|) + 3\ln(|x-1|) + C
\end{aligned}
$$

בנוסף, ישנם מספר מצבים מיוחדים אשר נשים אליהם לב. נתחיל במספר מושגים חשובים.

הגדרה 7.5 לכל פולינום $p(x)$, הדרגה של הפולינום, שתסומן ב־$deg(p(x))$, היא החזקה הגבוהה ביותר של x בפולינום שהמקדם שלה איננו 0.

דוגמה 7.6 הדרגה של הפולינום $p(x) = ax^2 + c$ כאשר $a \neq 0$ היא 2. הדרגה של $deg(ax^3+bx+c) = 3$ אם ורק אם $a \neq 0$.

יהי אינטגרל על פונקציה רציונאלית $\frac{p(x)}{q(q)}$. להלן מספר מקרים נבחרים ואופן ההתמודדות איתם.

- אם $p(x)=0,\ q(x)=1$, אזי האינטגרציה היא פשוט פונקציה לוגריתמית רגילה. לדוגמא:

$$\begin{aligned}\int\frac{A}{Bx+C}dx &= \frac{A}{B}\int\frac{1}{x+\frac{C}{B}}dx= \\ &= \frac{A}{B}\ln\left(\left|x+\frac{C}{B}\right|\right)+constant\end{aligned}$$

- אם $p(x)=q(x)=1$, נרצה לפצל את השבר באופן הבא:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Ax+B}{Cx+D} &\underset{\substack{Cx+D=t\\ x=\frac{t-D}{C}\\ Cdx=dt}}{=} \frac{A\left(\frac{t-D}{C}\right)+B}{t}= \\ &= \frac{At-AD}{Ct}+\frac{B}{t}= \\ &= \frac{A}{C}-\frac{AD}{C}\cdot\frac{1}{t}+B\cdot\frac{1}{t}\end{aligned}$$

- כאשר $p(x)=0,\ q(x)=2$ או $p(x)=1,\ q(x)=2$ והמכנה הוא פולינום פריק (ז"א, ניתן לרשום אותו כמכפלה של 2 פולינומים ממעלה 1), אזי ראינו את הפירוק הנדרש קודם לכן.

- כאשר $p(x)=1,\ q(x)=2$ והמכנה הוא פולינום פריק כך ש־$q(x)=a(x-\alpha)^2$, אזי נרצה לבצע את הפירוק הבא:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Ax+B}{a(x-\alpha)^2} &\underset{\substack{x-\alpha=t\\ dx=dt}}{=} \frac{A(t+\alpha)+B}{at^2}= \\ &= \frac{At}{at^2}+\frac{A\alpha}{at^2}+\frac{B}{at^2}= \\ &= \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{t}+\frac{A\alpha}{a}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{B}{a}\cdot\frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

ולכל ביטוי בנפרד אנחנו יודעים ומסוגלים לבצע אינטגרציה.

- כאשר $p(x)=1,\ q(x)=2$ והמכנה הוא פולינום אי־פריק (ז"א, לא ניתן לרשום אותו כמכפלה של 2 פולינומים ממעלה 1), נבצע השלמה לנגזרת של המונה. נסתכל על הנגזרת של המכנה ונבצע מניפולציות אלגבריות על המונה כך שהמונה יהפוך להיות

הנגזרת של המכנה ועוד איברים נוספים.

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Ax+B}{Cx^2+Dx+E} &= \frac{A}{2C}\left[\frac{2Cx+\frac{2CB}{A}}{Cx^2+Dx+E}\right]= \\ &= \frac{A}{2C}\left[\frac{2Cx+D-D+\frac{2CB}{A}}{Cx^2+Dx+E}\right]= \\ &= \frac{A}{2C}\left[\frac{2Cx+D}{Cx^2+Dx+E}-\frac{D-\frac{2CB}{A}}{Cx^2+Dx+E}\right]\end{aligned}$$

על האיבר הראשון אנחנו יודעים לבצע אינטגרציה (פשוט לוגריתם של המכנה). האיבר השני הוא מצב בו $p(x)=0,\ q(x)=2$ והמכנה הוא פולינום אי־פריק. במצבים אלו נבצע השלמה לריבוע של המכנה. נהפוך את המכנה ל־t^2+1 בעזרת החלפת משתנים ונבצע אינטגרציה בכך על פונקציה מוכרת. כיצד מבצעים השלמה לריבוע? הנוסחה לכך היא די פשוטה. אם $C>0$

$$Cx^2+Dx+E=\frac{1}{4C}(2Cx+D)^2+E-\frac{D^2}{4C}$$

ואז מבצעים החלפת משתנים $t=2Cx+D$. או לחילופין, מלכתחילה לבצע החלפת משתנים $x=\frac{t-D}{2C}$.

תרגיל 7.7 חשבו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx=?$ (פירוק פולינומים ־ מכנה פריק).
2. $\int x\left(x^2+5\right)^{2014}dx=?$ (החלפת משתנים).
3. $\int\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx=?$ (החלפת משתנים).
4. $\int\sin(x)\,e^x dx=?$ (אינטגרציה בחלקים).
5. $\int\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}dx=?$ (החלפת משתנים).
6. $\int\frac{5x+4}{x^2-5x+6}dx=?$ (פירוק פולינומים).

פתרון: נחשב את האינטגרלים בעזרת כל האמצעים שראינו קודם לכן. באינטגרל הראשון נפצל את הביטוי שבתוך האינטגרל לשני שברים שונים באופן הבא:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+3)}= \\ &= \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}= \\ &= \frac{xA+3A+xB-2B}{(x-2)(x+3)}\end{aligned}$$

ונקבל את המשוואות הבאות על ידי השוואת מקדמים־

$$\begin{aligned} x(A+B)+3A-2B &= 1 \\ A+B &= 0 \\ 3A-2B &= 1 \end{aligned}.$$

לכן $A=-B$ ו־ $3A+2A=1$ נותן לנו ש־ $A=-B=\frac{1}{5}$. נציב את השברים חזרה באינטגרל.

1. $$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-2)(x+3)}dx &= \int \frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}dx = \\ &= \int \frac{1}{5(x-2)}dx - \int \frac{1}{5(x+3)}dx = \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x-2)}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x+3)}dx = \\ &= \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5}\ln|x+3| + C \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int x\left(x^2+5\right)^{2014}dx &\underset{x^2+5=t,\ 2xdx=dt}{=} \int (t)^{2014}\frac{dt}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{2015}}{2015} + C = \\ &= \frac{1}{4030}\left(x^2+5\right)^{2015} + C \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx &\underset{\ln(x)=y,\quad dy=\frac{1}{x}dx}{=} \int y^{\frac{1}{2}}dy = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3}(\ln(x))^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \int \sin(x)e^x dx &= \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx = \\ &= \sin(x)e^x - \left[\cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx\right] = \\ &= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx \\ 2\int \sin(x)e^x dx &= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x + C \\ \int \sin(x)e^x dx &= e^x\cdot\frac{\sin(x)-\cos(x)}{2} + C \end{aligned}$$

$$5.\quad \int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}dx \underset{\arctan(x)=y,\ dy=\frac{1}{1+x^2}dx}{=} \int e^y dy =$$
$$= e^y + C =$$
$$= e^{\arctan(x)} + C$$

$$6.\quad \int \frac{5x+4}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{5x+4}{(x-2)(x-3)}dx$$
$$\frac{5x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$
$$\frac{5x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}$$
$$5x+4 = x(A+B)-3A-2B$$
$$\Rightarrow \quad A+B = 5$$
$$-3A-2B = 4$$
$$\Rightarrow \quad 2A+2B = 10$$
$$-3A-2B = 4$$
$$-A = 14$$
$$\Rightarrow \quad A = -14$$
$$B = 19$$
$$\int \frac{5x+4}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{-14}{(x-2)} + \frac{19}{(x-3)}dx =$$
$$= -14\ln(|x-2|) + 19\ln(|x-3|) + C$$

תרגיל 7.8 פתרו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx = ?$ (השלמה לריבוע של פולינום אי־פריק).
2. $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+8}dx = ?$ (השלמה לנגזרת של פולינום אי־פריק).
3. $\int \sqrt{1-x^2}dx = ?$ (החלפת משתנים).
4. $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = ?$ (זיהוי נגזרת).
5. $\int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}+1}dx = ?$ (החלפת משתנים).

פתרון: נפתור כל אינטגרל בדרך מעט שונה בהתאם למצב הנתון.

$$\begin{aligned}
1.\quad \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{1}{x^2-4x+4+4}dx = \\
&= \int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}dx = \\
&\underset{y=\frac{x-2}{2},\ dx=2dy}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \\
&= \frac{1}{2}\arctan(y)+C = \\
& \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.\quad \int \frac{3x+6}{x^2-4x+8}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-4x+8}dx = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4+4+4}{x^2-4x+8}dx = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \frac{3}{2}\int \frac{8}{x^2-4x+8}dx = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\left|x^2-4x+8\right|\right) + 12\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\left|x^2-4x+8\right|\right) + 6\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בתוצאה הקודמת עבור $\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx$.

$$\begin{aligned}
3.\quad \int \sqrt{1-x^2}dx &\underset{\substack{x=\sin(t)\\ dx=\cos(t)\,dt}}{=} \int \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)\,dt = \\
&= \int \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos(2t)+1)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)+C = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\cdot 2\sin(t)\cos(t)+C = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C
\end{aligned}$$

$$4. \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + C = \tan(x) + C$$

כאשר את המעבר ביצענו על ידי זיהוי נגזרת של מנה. ישנה דרך יותר ברורה לבצע חישוב זה באופן הבא: נבצע החלפת משתנים, $\frac{1}{\cos(x)} = t$ ואז $1-\frac{1}{t^2} = 1-\cos^2(x) = \sin^2(x)$.

$$4. \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx \underset{\substack{\frac{1}{\cos(x)} = t \\ \frac{1}{t}\sqrt{t^2-1} = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} = \sin(x) \\ \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx = dt \\ t\sqrt{t^2-1}dx = dt}}{=} \int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \sqrt{t^2-1} + C = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1} + C = \sqrt{\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}} + C = \tan(x) + C$$

$$5. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}+1}dx \underset{\substack{x^{\frac{1}{2}} = t \\ dx = 2tdt}}{=} \int \frac{t}{t^3+1}2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = \frac{2}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+1}dt = \frac{2}{3}\ln\left(t^3+1\right) + C = \frac{2}{3}\ln\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right) + C$$

תרגיל 7.9 פתרו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int \frac{x^2}{a^4-x^4}dx=?$ (פירוק פולינומים ממעלה רביעית).
2. $\int \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)}dx=?$ (פירוק פולינומים).
3. $\int x\sqrt{x+1}dx=?$ (החלפת משתנים).

פתרון: האינטגרלים הבאים מתייחסים לפולינומים ממעלה גבוהה מאלה שראינו עד כה, אבל יחד עם זאת נעזר באותן הטכניקות לפתרון שלהם.

$$\begin{aligned}
1.\quad \int \frac{x^2}{a^4-x^4}dx &= \int \frac{x^2}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}dx = \\
&= \int \frac{x^2}{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)}dx = \\
\frac{x^2}{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)} &= \frac{A}{(a-x)}+\frac{B}{(a+x)}+\frac{Cx+D}{(a^2+x^2)} \\
\frac{x^2}{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)} &= \frac{A(a+x)\left(a^2+x^2\right)+B(a-x)\left(a^2+x^2\right)+(Cx+D)(a-x)(a+x)}{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)} \\
x^2 &= A(a+x)\left(a^2+x^2\right)+B(a-x)\left(a^2+x^2\right)+(Cx+D)(a-x)(a+x)
\end{aligned}$$

במצב כזה נוכל להציב $x=\pm a$ ולמצוא בכך את A,B. עבור $x=a$ נקבל

$$\begin{aligned}
a^2 &= A(a+a)\left(a^2+a^2\right)+0+0 \\
\frac{1}{4a} &= A
\end{aligned}$$

עבור $x=-a$ נקבל ש־

$$\begin{aligned}
a^2 &= 0+B(a+a)\left(a^2+a^2\right)+0+0 \\
\frac{1}{4a} &= B=A
\end{aligned}$$

נציב כעת $x=0$ ונקבל

$$\begin{aligned}
0 &= A(a+0)\left(a^2+0^2\right)+B(a-0)\left(a^2+0^2\right)+(0+D)(a-0)(a+0) \\
0 &= \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+Da^2 \\
0 &= D+\frac{1}{2} \Rightarrow\ D=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ולכן

$$x^2 = A(a+x)\left(a^2+x^2\right)+B(a-x)\left(a^2+x^2\right)+(Cx+D)\left(a^2-x^2\right)$$

נסתכל רק על האיברים ממעלה שלישית ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= Ax^3 - Bx^3 - Cx^3 \\ 0 &= C \end{aligned}$$

לכן, בסופו של דבר קיבלנו את הפירוק הבא:

$$\int \frac{x^2}{a^4 - x^4} dx = \int \frac{1}{4a(a-x)} + \frac{1}{4a(a+x)} - \frac{1}{2(a^2+x^2)} dx$$

וניתן כעת לפתור כל אינטגרל בנפרד

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{a^4 - x^4} dx &= -\frac{1}{4a} \int \frac{1}{(x-a)} dx + \frac{1}{4a} \int \frac{1}{(a+x)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(a^2+x^2)} dx = \\ &= -\frac{1}{4a} \ln(|x-a|) + \frac{1}{4a} \ln(|x+a|) - \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} dx = \\ &\underset{x=ay,\ dx=ady}{=} -\frac{1}{4a} \ln(|x-a|) + \frac{1}{4a} \ln(|x+a|) - \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{(1+y^2)} ady = \\ &= -\frac{1}{4a} \ln(|x-a|) + \frac{1}{4a} \ln(|x+a|) - \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{(1+y^2)} ady = \\ &= -\frac{1}{4a} \ln(|x-a|) + \frac{1}{4a} \ln(|x+a|) - \frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} dx &= \int \frac{A}{(3x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} dx \\ \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} &= \frac{Ax^2 + A + 3Bx^2 - Bx + 3Cx - C}{(3x-1)(x^2+1)} \\ x^2+x-2 &= x^2(A+3B) + x(-B+3C) + A - C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A+3B &= 1 \\ -B+3C &= 1 \\ A-C &= -2 \\ \Rightarrow \quad A &= -\frac{7}{5} \\ B &= \frac{4}{5} \\ C &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} dx &= \int \frac{-7}{5(3x-1)} + \frac{4x+3}{5(x^2+1)} dx = \\ &= -\frac{7}{15} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)} dx + \frac{2}{5} \int \frac{2x}{(x^2+1)} dx + \frac{3}{5} \int \frac{1}{(x^2+1)} dx = \\ &= -\frac{7}{15} \ln\left(\left|x - \frac{1}{3}\right|\right) + \frac{2}{5} \ln\left(\left|x^2+1\right|\right) + \frac{3}{5} \arctan(x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.\quad \int x\sqrt{x+1}dx \underset{\substack{x+1=t^2 \\ dx=2tdt}}{=} & \int \left(t^2-1\right) t\cdot 2tdt = \\ = & \; 2\int t^4 dt - 2\int t^2 dt = \\ = & \; 2\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + C = \\ = & \; \frac{2\left(x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \end{aligned}$$

7.3 האינטגרל המסויים

האינטגרל הוא למעשה קירוב של סכום של ערכים. כיצד מתקיים החיבור הזה בין שני דברים דומים אך יחד עם זאת שונים זה מזה? נניח כי יש לנו פונקציה כלשהי $f\left(x\right) \geq 0$ בקטע $[a,b]$ ואנחנו מעוניינים לחשב את השטח הכלוא בין הפונקציה לציר x. דרך אחת, די פשוטה היא לחלק את הקטע $[a,b]$ להרבה מאוד קטעים, n קטעים קטנים באורך $h = \frac{b-a}{n}$ כל אחד ובכל קטע כזה לשרטט מלבנים. נסמן את הקטעים ב־ $[x_i, x_{i+1}]$ כאשר $x_i = a+h\cdot i$, $i = 0,\ldots,n$ ו־ $x_0 = a,\ x_n = b$. המלבן הראשון בקטע $[x_i, x_{i+1}]$ יהיה בגובה m_i כאשר m_i הוא הערך הגבוה ביותר כך ש־ $f\left(x\right) \geq m_i$ לכל $x \in [x_i, x_{i+1}]$ והמלבן השני ייבחר בגובה הנמוך ביותר M_i כך ש־ $f\left(x\right) \leq M_i$ לכל $x \in [x_i, x_{i+1}]$. בצורה זו מקבלים שבכל קטע הפונקציה חסומה בין 2 מלבנים ־ מלמטה על ידי מלבן בגובה m_i ומלמעלה על ידי מלבן בגובה M_i. ראו שרטוט 23.

נגדיר את הסכום של שטחי המלבנים התחתונים על ידי

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot h = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right),$$

ואת סכום שטחי המלבנים העליונים על ידי

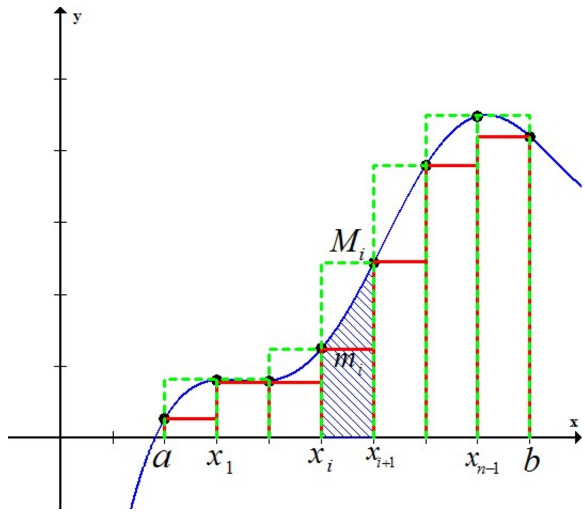
$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot h = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\underline{S_n} \leq S \leq \overline{S_n}$ כאשר S הוא השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה־x.

הגדרה 7.10 תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. נאמר ש־f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n} \left(= S\right).$$

נסמן במקרה זה $S = \int_a^b f\left(x\right) dx$.



איור 23: שרטוט של חלוקה של קטע $[a,b]$ וקביעת מלבנים לפי ערך מינימאלי (מלבנים אדומים) וערך מקסימאלי (מלבנים ירוקים) בכל קטע בנפרד. חלוקה של הקטע בצורה יותר עדינה לבסוף יוצרת קירוב אופטימאלי לשטח שמתחת לגרף כפי שניתן לראות בשרטוט (השטח המסומן בכחול בקטע $[x_i,x_{i+1}]$).

הדרישה כי הפונקציה תהיה רציפה איננה הכרחית , אלא די להניח שהפונקציה חסומה ואז הערך המינימאלי והמקסימאלי קיימים. בנוסף, אם הפונקציה רציפה אז לפי משפט ויירשטראס (משפט 2.78 בעמוד 65) הערך המינימאלי והמקסימאלי קיימים בכל קטע בנפרד.

משפט 7.11 פונקציה רציפה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ היא אינטגרבילית בקטע זה.

תרגיל 7.12 חשבו את האינטגרל $\int_0^1 x^3dx$ על פי הגדרת האינטגרל המסויים.

פתרון: נחלק את הקטע $[0,1]$ לקטעים באורך $\frac{1}{n}$ ולאחר מכן ניקח את הגבול $n\to\infty$. נשים לב שלכל $i=0,\ldots,n-1$, $[x_i,x_{i+1}]=\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ ובנוסף, מאחר והפונקציה היא מונוטונית עולה ממש בקטע זה, אז הערכים המקסימאליים והמינימאליים בכל קטע הם קצוות הקטע. זאת אומרת,

$$\forall i=0,\ldots,n-1 \quad m_i=\min_{x\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]}x^3=\left(\frac{i}{n}\right)^3<\left(\frac{i+1}{n}\right)^3=\max_{x\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]}x^3=M_i.$$

נציין כי אורך כל קטע הינו $h=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$. נחשב את הסכומים $\underline{S_n},\ \overline{S_n}$ בצורה מפורשת ונקבל,

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\cdot h=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1}i^3,$$

$$.\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\cdot h=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^3=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n}i^3$$

כאשר במעבר האחרון ביצענו החלפת אינדקסים באופן הבא:

$$.\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^3=\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)=\sum_{i=0}^{n}i^3$$

נעזר בנוסחה לסכום הנ"ל ונקבל,

$$,\underline{S_n}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1}i^3=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2=\frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

$$.\overline{S_n}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n}i^3=\frac{1}{n^4}\left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

כאשר ניקח את הגבול $n\to\infty$ נגיע לתוצאה,

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

$$,\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

כנדרש, ולכן האינטגרל שווה ל- $\frac{1}{4}$. שימו לב כי זו התוצאה אליה היינו מצפים להגיע לו היינו מחשבים את האינטגרל כפי שלמדתם בתיכון,

$$.\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

7.3.1 תכונות האינטגרל המסויים

יהיו פונקציות f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. אזי:

1. <u>חיבוריות</u>: לכל $c\in[a,b]$ מתקיים

$$.\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

2. <u>מונוטוניות האינטגרל</u>: אם $f(x)\le g(x)$ אזי

$$.\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

3. <u>חיבור וחיסור אינטגרלים</u>:

$$\int\limits_a^b \left(f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right) dx = \int\limits_a^b f\left(x\right) dx \pm \int\limits_a^b g\left(x\right) dx .$$

4. לכל קבוע $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int\limits_a^b t f\left(x\right) dx = t \int\limits_a^b f\left(x\right) dx .$$

5. אם $f\left(x\right) \leq 0$ בקטע $[a, b]$ אזי

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx = -S .$$

6. <u>אינטגרל של פונקציה בערך מוחלט</u>:

$$\left| \int\limits_a^b f\left(x\right) dx \right| \leq \int\limits_a^b \left| f\left(x\right) \right| dx .$$

7. <u>החלפת כיוון אינטגרציה</u>:

$$\int\limits_b^a f\left(x\right) dx = -\int\limits_a^b f\left(x\right) dx .$$

טענה 7.13 אם הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה, חסומה ואי־זוגית אזי $\int_{-a}^{a} f\left(x\right) dx = 0$ לכל $a \geq 0$.

שימו לב כי פונקציה היא אי־זוגית אם ורק אם $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ ופונקציה היא זוגית אם $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$. למעשה פונקציה היא זוגית אם היא סימטרית סביב אפס והפונקציה היא אי־זוגית אם יש לה סימטריה והיפוך סביב $x = 0$. חשוב לשים לב שיכולה להיות פונקציה שהיא לא זוגית ולא אי־זוגית, אם היא לא מקיימת אף אחד מהתנאים הללו.

פתרון: נחשב את האינטגרל ישירות תוך שימוש בכללים הנ"ל. יהי $a \geq 0$, אזי

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\
&\underset{y=-x}{=} \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\
&= -\int_{a}^{0} -f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\
&= \int_{a}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\
&= -\int_{0}^{a} f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \\
&\underset{y=x}{=} -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0
\end{aligned}$$

כאשר המעבר הראשון בוצע בעזרת תכונת החיבוריות של האינטגרל, המעבר השני והאחרון הם החלפת משתנים של האינטגרל הראשון, השיוויון השלישי נובע מאי־זוגיות הפונקציה והשיוויון החמישי נובע מתכונת החלפת כיוון האינטגרל.

טענה 7.14 לכל $m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\int_{0}^{1} x^m (1-x)^n\,dx = \int_{0}^{1} x^n (1-x)^m\,dx .$$

פתרון: נבצע חישוב ישיר עם החלפת משתנים.

$$\int_{0}^{1} x^m (1-x)^n\,dx \underset{\substack{y=1-x \\ dy=-dx \\ x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0}}{=} \int_{1}^{0} (1-y)^m y^n (-dy) =$$

שימו לב שביצענו החלפת משתנים ולכן היינו חייבים לשנות את הגבולות בהתאם.

$$\begin{aligned}\int_1^0 (1-y)^m y^n (-dy) &= -\int_1^0 (1-y)^m y^n dy = \\ &= \int_0^1 (1-y)^m y^n dy = \\ &\underset{x=y}{=} \int_0^1 (1-x)^m x^n dx\end{aligned}$$

כנדרש.

ישנם מספר משפטים חשובים ביותר שהוכחתם אשר כבר מן השם שלהם ניתן להבין כי הם מאוד בסיסיים בחשבון האינפיטיסימלי.

משפט 7.15 (משפט הערך הממוצע לאינטגרלים) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש־

$$.f(c) = \frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)\,dx \qquad (20)$$

תרגיל 7.16 מצאו את כל ערכי $c \in (0,9)$ כך ש־

$$.9\sqrt{c} = \int_0^9 \sqrt{x}dx$$

פתרון: נשתמש לשם ההוכחה במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים. ידוע לפי משפט 7.15 כי קיימת נקודה $c \in (0,9)$ כך ש־

$$.\sqrt{c} = f(c) = \frac{1}{9}\int_0^9 f(x)\,dx = \frac{1}{9}\int_0^9 \sqrt{x}dx$$

לכן נחשב את האינטגרל ונקבל

$$\frac{1}{9}\int_0^9 \sqrt{x}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{1}{9}\cdot\frac{27}{\frac{3}{2}} = 2$$

ולכן $\sqrt{c} = 2 \Leftarrow c = 4$. כמובן שזהו ערך יחיד מאחר והאינטגרל שווה לערך ספציפי ולכן גם הריבוע שלו שווה לערך יחיד.

תרגיל 7.17 הוכיחו כי

$$.1 \le \int\limits_0^1 e^{\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)} dx \le 3$$

פתרון: נשתמש במשפט הערך הממוצע בכדי להוכיח את הנדרש. נשים לב כי עבור $0 \le x \le 1$ מתקיים ש־

$$,1 \le e^{\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)} \le e < 3$$

וזאת מאחר ו־ x^2+1 היא פונקציה מונוטונית עולה בין 0 ל־1, $0 \le \ln\left(x^2+1\right) \le 0.7$ היא פונקציה מונוטונית עולה כאשר $0 \le x \le 1$ וכן $0 \le \sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) \le 0.65$ היא פונקציה מונוטונית עולה כאשר $0 \le x \le 1$. ממשפט הערך הממוצע נובע שקיימת נקודה $0 \le c \le 1$ כך ש־

$$,e^{\sin\left(\ln\left(c^2+1\right)\right)} = \frac{1}{1-0} \int\limits_0^1 e^{\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)} dx$$

ולכן אם $1 \le e^{\sin\left(\ln\left(c^2+1\right)\right)} \le e$ אזי התוצאה נובעת באופן מיידי.

כעת נוכל לדון במשפט המכליל את משפט 7.15 והוא המשפט היסודי של החדו"א.

משפט 7.18 (המשפט היסודי של החדו"א) תהי פונקציה רציפה $f(x)$ בקטע $[a,b]$. עבור כל $x \in [a,b]$ נגדיר את הפונקציה

$$.F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$$

אזי מתקיים ש־ $F(x)$ פונקציה גזירה ובנוסף $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in [a,b]$.

תרגיל 7.19 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. קיימת פונקציה $f(x)$ כך ש־ $|x| = \int_{-1}^x f(t)\, dt$.
2. קיימים $c \in \mathbb{R}$ ופונקציה רציפה $f(x)$ כך ש־ $|x| = \int_{-1}^x f(t)\, dt + c$.
3. קיימים $c \in \mathbb{R}$ ופונקציה $f(x)$ כך ש־ $|x| = \int_{-1}^x f(t)\, dt + c$.

פתרון: סעיפים 1 ו־2 לא אפשריים ונראה זאת עוד מעט, ולעומת זאת הסעיף השלישי הוא נכון.

1. נניח בשלילה שקיימת פונקציה $f(x)$ כך ש־ $|x| = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. אזי

$$1 = |-1| = \int_{-1}^{-1} f(t)\,dt = 0$$

וזאת כמובן סתירה.

2. נניח בשלילה שקיימים $c \in \mathbb{R}$ ופונקציה רציפה $f(x)$ כך ש־ $|x| = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt + c$. אזי נשים לב כי

$$1 = |-1| = \int_{-1}^{-1} f(t)\,dt + c = 0 + c = c$$
$$\Rightarrow c = 1$$

זאת אומרת שבכל מקרה, אם קיימים פונקציה וקבוע כזה הוא שווה ל־ $c = 1$. כעת נקבל ש־

$$|x| - 1 = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

ונסתכל על הקטע $[-1, 2]$. מאחר ו־f רציפה אז לפי משפט 7.18 נובע שהפונקציה $|x| - 1$ גזירה בקטע זה ובפרט נובע ש־ $|x|$ גזירה בנקודה $x = 0$, סתירה.

3. כמו קודם לכן, אם קיים קבוע שמקיים את התנאי אז בהכרח הוא שווה ל־$c = 1$. כעת אנו נבנה את הפונקציה שנדרשת בסעיף זה ונראה כי היא איננה רציפה אבל אכן קיימת. תחילה ננסה למצוא פונקציה כך ש־$|x| = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$.

   (א) אם $x > 0$ אזי נדרוש ש־

$$|x| = x = \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 1 dt \Rightarrow f(t) = 1 \quad \forall t > 0 .$$

   (ב) אם $x < 0$ אזי נדרוש ש־

$$|x| = -x = \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} (-1)\,dt \Rightarrow f(t) = -1 \quad \forall t < 0 .$$

   לכן מצאנו פונקציה שמקיימת את התנאי $|x| = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ והיא

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} .$$

   נשים לב כעת כי

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = -\int_{0}^{-1} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt =$$
$$= -|-1| + |x| = |x| - 1$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{x} f(t)\,dt + 1 = |X|$$

כנדרש.

משפט 7.18 קובע למעשה שהאינטגרל הוא פונקציה גזירה ולכן המשפט הקודם, משפט 7.15 הוא למעשה תוצאה ישירה של משפט לגראנג' (משפט 3.18 בעמוד 80). מסקנה ישירה מהמשפט היסודי של החדו"א היא נוסחת ניוטון־לייבניץ .

מסקנה 7.20 (נוסחת ניוטון־לייבניץ) תהי פונקציה רציפה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ ותהי פונקציה $G(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ עבור כל $x \in [a,b]$. אזי

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad (21)$$

תרגיל 7.21 חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int_{-1}^{1} x \arctan(x)\,dx = ?$.
2. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \ln(\sin(x)+1)\,dx = ?$.

פתרון: נחשב כל אינטגרל בנפרד תוך שימוש בנוסחת ניוטון־ללייבניץ (משוואה (21)).

$$
\begin{aligned}
1.\quad \int_{-1}^{1} x\arctan(x)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\arctan(-1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1\cdot dx + \frac{1}{2}\arctan(x)\,|_{-1}^{1} = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(-1)) = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(1-(-1)) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4}\right) = \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}
$$

בחישוב הבא נבצע החלפת משתנים בכדי לפתור את הבעיה של פונקציה לוגריתמית המופעלת על פונקציה טריגונומטרית.

$$
\begin{aligned}
2.\quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\ln(\sin(x)+1)\,dx \quad &\underset{\substack{t=\sin(x)+1 \\ dt=\cos(x)\,dx \\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}}}{=} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\ln(t)\,dt = \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1\cdot\ln(t)\,dt = \\
&= [t\cdot\ln(|t|)]_{0.5}^{1.5} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} t\cdot\frac{1}{t}dt = \\
&= 1.5\ln(1.5) - 0.5\ln(0.5) - t|_{0.5}^{1.5} = \\
&= 1.5\ln(1.5) - 0.5\ln(0.5) - 1.5 + 0.5 = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1
\end{aligned}
$$

תרגיל 7.22 הוכיחו כי אם f היא פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וכן כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש־ $f(c)>0$, אזי קיים קטע כלשהו $[d,e]\subseteq[a,b]$ כך ש־

$$\int\limits_d^e f(x)\,dx>0\,.$$

פתרון: מאחר ו־ $f(c)>0$ והפונקציה היא פונקציה רציפה, אזי קיימת סביבה $(c-\delta,c+\delta)$ (כאשר $\delta>0$) וקבוע $A>0$ כך שלכל $x\in(c-\delta,c+\delta)$ מתקיים $f(x)>A$. לכן בפרט מתקיים ש־

$$\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx\geq\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} Adx=2Ax|_{c-\delta}^{c+\delta}=2A\delta>0\,.$$

שימו לב שהשתמשנו בתכונות המונוטוניות של האינטגרל בקטע $(c-\delta,c+\delta)$ כאשר $f(x)>A$ בקטע זה.

7.3.2 חישובי שטחים

שימוש מרכזי לאינטגרל המסויים זה חישובי ושטחים ובפרט חישובי שטחים בין פונקציות. יהיו צמד פונקציות f,g ונניח כי הן נחתכות בנקודות $a<b$ ובנוסף $g(x)>f(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$. אזי השטח שכלוא בין הפונקציות הללו הוא

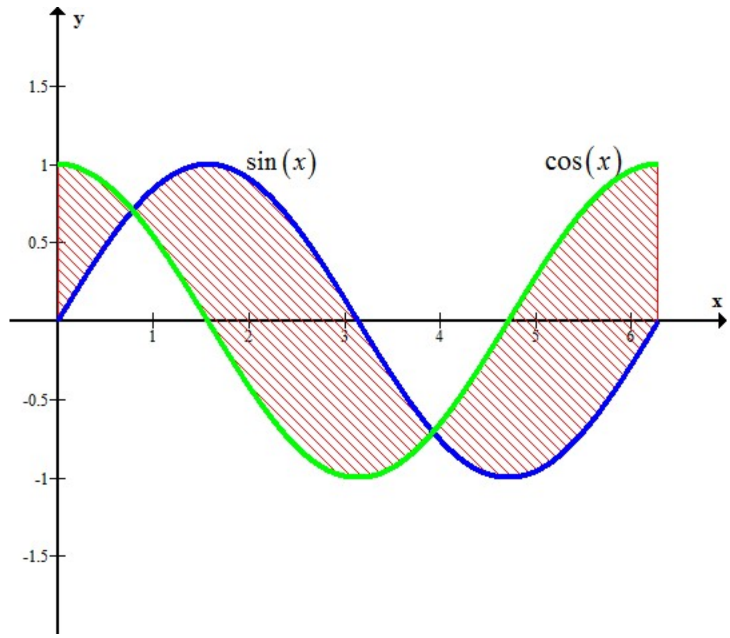
$$S=\int\limits_a^b g(x)\,dx-\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b (g(x)-f(x))\,dx\,.$$

תרגיל 7.23 חשבו את השטח שבין $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$ בקטע $[0,2\pi]$.

פתרון: תחילה בתרגילים מסוג זה אנחנו חייבים לשרטט את הפונקציות בכדי למצוא נקודות חיתוך. ראו איור 24. אנו יודעים כי $\sin(x)=\cos(x)\Leftrightarrow\tan(x)=1$ וזה מתרחש עבור כל $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

נשים לב שעבור $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ מקבלים ש־ $\cos(x)\geq\sin(x)$ ולכן נחשב את השטח באופן הבא.

$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos(x)-\sin(x))\,dx+\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos(x)-\sin(x))\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin(x)-\cos(x))\,dx= \\
&= [\sin(x)+\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\sin(x)+\cos(x)]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}+[-\cos(x)-\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}= \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1+0+1-\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=4\sqrt{2}
\end{aligned}$$



איור 24: השטח שבין $\sin(x)$ ו־ $\cos(x)$ מודגש באדום.

תרגיל 7.24 חשבו את השטח בין העקומות $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = 0$ ו־ $x = 2$.

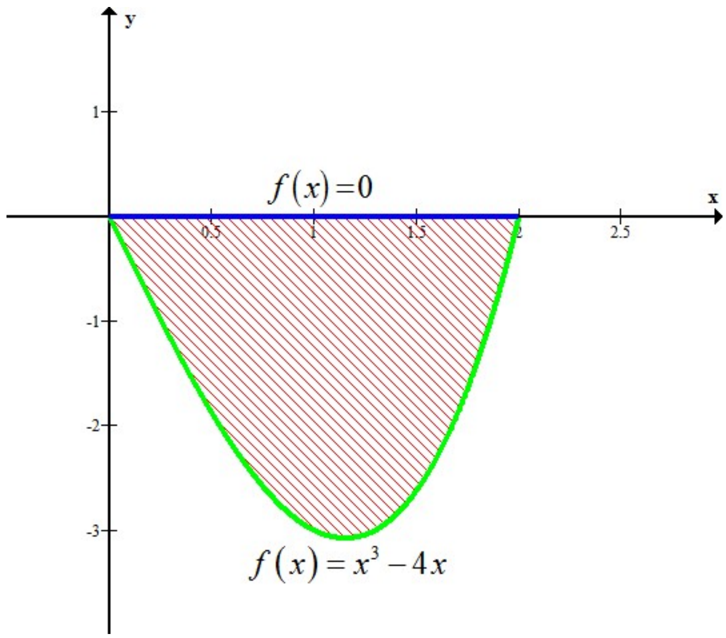
פתרון: נשרטט תחילה את הפונקציות עם נקודות החיתוך שלהן. ראו איור 25.

קל לראות שבתחום $x \in [0, 2]$ הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ היא שלילית ולכן

$$S = \int_0^2 \left(0 - x^3 + 4x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = 4.$$

תרגיל 7.25 נתונה פונקציה $f(x) = x + \cos(2x)$ ויהי משיק לפונקציה $y = -x + b$ בנקודה A כך ש־ $0 < x_A < \frac{\pi}{2}$. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$.

פתרון: נמצא תחילה את הקואורדינטות של הנקודה A ואת משוואת המשיק. בכדי שהמשיק אכן ישיק לפונקציה אנחנו צריכים למצוא נקודה על הפונקציה בה הנגזרת שווה ל־ -1.



איור 25: השטח שבין $y = x^3 - 4x$ וציר ה־ x מודגש באדום.

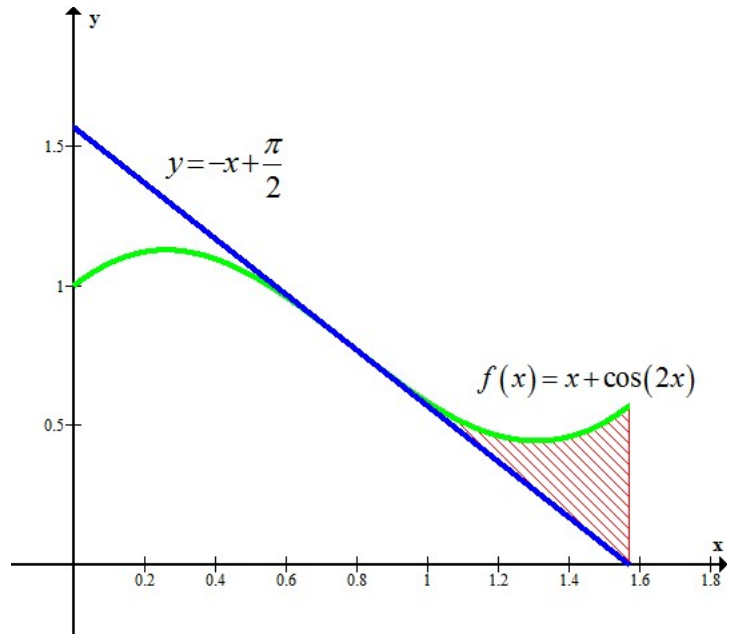
נמצא את הנגזרת ונשווה ל־-1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - 2\sin(2x) = -1 \\
&\Rightarrow -2\sin(2x) = -2 \\
&\Rightarrow \sin(2x) = 1 \\
&\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\
x &= \frac{\pi}{4} + \pi k
\end{aligned}$$

ולפי התנאי על נקודות ההשקה נובע ש־ $x_A = \frac{\pi}{4}$. לכן נקבל ש־ $A = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. מכאן נוכל למצוא את משוואת המשיק. נקבל ש־

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= -\frac{\pi}{4} + b \\
.\frac{\pi}{2} &= b
\end{aligned}$$

נשרטט את הגרפים של הפונקציות. ראו איור 26.



איור 26: השטח שבין הפונקציה והמשיק לה מודגש באדום.

נבצע אינטגרציה בקטע $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ ונקבל

$$.S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\cos(2x)+x-\frac{\pi}{2}\right)dx=$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2x+\cos(2x)-\frac{\pi}{2}\right)dx=$$
$$=\left[x^2+\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{\pi}{2}x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\sin(\pi)-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$$

7.4 אינטגרל לא אמיתי

ישנם ינטגרלים מסויימים שלא ניתן לחשב אותם מאחר והם שואפים לאינסוף. לדוגמא, נוכל לבחון את האינטגרל על $\frac{1}{x}$ בקטע $[0,1]$. השטח שמתחת לגרף בחלק זה שואף לאינסוף ולכן גם האינטגרל איננו סופי.

הגדרה 7.26 תהי פונקציה f המוגדרת לכל $x \geq a$. נאמר כי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אם הגבול $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ קיים וסופי.

באופן דומה נוכל להגדיר את האינטגרל עם גבול תחתון אינסופי ולקבוע כי הוא מתכנס אם ורק אם הגבול $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ קיים וסופי (כמובן תחת התנאי שהפונקציה מוגדרת בתחום זה). אינטגרל עם צמד גבולות אינסופיים נגדיר בתור הסכום

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

ונשתמש בהגדרות הנתונות עבור כל אחד מהאינטגרלים בנפרד. מצב נוסף אפשרי הוא שקיימת אסימפטוטה לפונקציה בנקודה כלשהי.

הגדרה 7.27 תהי פונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע $(a,b]$ ונניח כי לפונקציה קיימת אסימפטוטה אנכית בנקודה $x=a$. נגדיר

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+}\int_A^b f(x)\,dx,$$

ונאמר שהאינטגרל מתכנס אם הגבול קיים וסופי.

כאשר האינטגרל שנחשב לא יתכנס, נאמר כי מדובר באינטגרל שמתבדר.

תרגיל 7.28 קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או לא.

1. $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$.
2. $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}dx$.

פתרון: נפתור כל אינטגרל בנפרד על פי ההגדרה של אינטגרל עם גבול אינסופי.

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln(x)}dx \\
\int_2^b \frac{1}{x\ln(x)}dx &\underset{t=\ln(x),dt=\frac{1}{x}dx}{=} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{t}dt = \\
&= \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))
\end{aligned}$$

ולכן נקבל ש־

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln(x)}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\right] = \infty\end{aligned}$$

והאינטגרל מתבדר.

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2(x)}dx \\ \int_2^b \frac{1}{x\ln(x)}dx &\underset{t=\ln(x),dt=\frac{1}{x}dx}{=} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{t^2}dt = \\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} = \\ &= \left[-\frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln(2)}\right]\end{aligned}$$

ולכן נקבל ש־

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2(x)}dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln(2)}\right] = \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\end{aligned}$$

והאינטגרל מתכנס.

תרגיל 7.29 קבעו עבור אילו ערכי $p \in \mathbb{R}$, האינטגרל $\int_0^\infty e^{px}dx$ מתכנס.

פתרון: בשלב הראשון נצטרך לזהות נקודות בעיתיות בתחום $[0,\infty)$. הפונקציה היא פונקציה רציפה ו־$e^{p0} = 1$ לכל ערך ולכן לא יהיו אסימפטוטות אנכיות כלל. האזור הבעייתי הוא עם כן החלק בו $x \to \infty$. נחלק למספר מצבים אפשריים:

1. עבור $p = 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{0\cdot x}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b 1dx = \\ &= \lim_{b\to\infty}[b-0] = \infty\end{aligned}$$

והאינגרל מתבדר.

2. עבור $p > 0$: אנו יודעים ש־ $g(x) = e^{px} > 1$ לכל $x > 0$ ולכן לפי מונוטוניות של האינטגרל נקבל ש־

$$\int_0^\infty e^{p\cdot x}dx \quad \geq \quad \lim_{b\to\infty}\int_0^b 1dx = \infty$$

ובפרט גם במצב הזה האינטגרל מתבדר.

3. עבור $p < 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{p\cdot x}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-|p|x}dx = \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-|p|b}}{-|p|} - \frac{e^{-|p|0}}{-|p|}\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{|p|} - \frac{1}{|p|\,e^{|p|b}}\right] = \\
&= \frac{1}{|p|}\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{e^{|p|b}}\right] = \frac{1}{|p|}
\end{aligned}$$

תרגיל 7.30 חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx$.

פתרון: נשים לב שיש לנו 2 איזורים בעייתים בחישוב. כאשר $x \to 1$ וכאשר $x \to \infty$. נפצל את האינטגרל בהתאם.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^2} = \\
&= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{dx}{(x-1)^2} = \\
&= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b (x-1)^{-2}\,dx + \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 (x-1)^{-2}\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_2^c (x-1)^{-2}\,dx = \\
&= \lim_{b\to 1^-}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_0^b + \lim_{a\to 1^+}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_a^2 + \lim_{c\to\infty}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_2^c = \\
&= -\lim_{b\to 1^-}\left[\frac{1}{(b-1)} + 1\right] - \lim_{a\to 1^+}\left[1 - \frac{1}{(a-1)}\right] - \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{(c-1)} - 1\right] = \\
&= \infty + \infty + 1 = \infty
\end{aligned}$$

והאינטגרל מתבדר.

תרגיל 7.31 חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx$.

פתרון: נשים לב שמדובר בפונקציה בתור מנה של פונקציה רציפות והמכנה לעולם אינו מתאפס על כן הנקודות הבעיתיות היחידות שיש לנו הן $x\to\pm\infty$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx,$$

נשים לב ש־ $f\left(x\right)=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$ היא פונקציה זוגית על פי הגדרה:

$$f\left(-x\right)=\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}=f\left(-x\right)$$

ולכן נקבל ש־

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx &= 2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx= \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}dx= \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx= \\
&\underset{e^{x}=t,\ dt=e^{x}dx}{=} 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{e^{b}}\frac{1}{t^{2}+1}dt= \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left(\arctan\left(e^{b}\right)-\arctan\left(1\right)\right)= \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

8 טורים

8.1 סכומים חלקיים וטורים

תהי סדרה $(a_n)_{n=k}^{\infty}$. סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ תסומן ב־ $(S_N)_{N=k}^{\infty}$ ותוגדר על ידי $S_M = \sum_{n=k}^{M} a_n$. לסכום האינסופי $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ נקרא טור.

הגדרה 8.1 הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים $(S_N)_{N=k}^{\infty}$ מתכנסת ונסמן

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=k}^{N} a_n.$$

8.1.1 הטור ההרמוני

הטור ההרמוני הוא טור מאוד מעניין אשר נעזר בו רבות בהמשך. הטור ההרמוני מבוסס על הסדרה ההרמונית, $a_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1$. נקודה חשובה היא שהטור ההרמוני לא מתכנס, למעשה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

וזה למרות שהאיברים הולכים ונהיים קטנים ככל ש־n גדל.

8.1.2 אריתמטיקה של טורים מתכנסים

ישנן 2 תכונות מרכזיות באריתמטיקה של טורים מתכנסים. יהיו צמד טורים $\sum_{n=k}^{\infty} a_n, \sum_{n=k}^{\infty} b_n$ המתכנסים ל־A, B בהתאמה. אזי

- הטור $\sum_{n=k}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ מתכנס ל־ $A \pm B$.
- לכל $c \in \mathbb{R}$, הטור $\sum_{n=k}^{\infty} ca_n$ מתכנס ל־ $c \cdot A$.

מסקנה 8.2 אם הטור $\sum_{n=k}^{\infty} ca_n$ מתכנס ו־ $c \neq 0$ אזי הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט 8.3 יהי $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ טור מתכנס, אזי $\lim_{N\to\infty} a_N = 0$.

תרגיל 8.4 האם הטורים הבאים מתכנסים?

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^{\frac{1}{n}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

פתרון: נשתמש במשפטים וזהויות שראינו עד כה בכדי להוכיח התכנסות והתבדרות של הטורים הנ"ל.

1. נזכור כי $\ln(n) < n$ ולכן $\frac{1}{n} > \frac{1}{\ln(n)}$. נבחן לאן שואפת הסדרה $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ ולשם כך נשתמש בפונקציה $f(x) = x^{-\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(x^{-\frac{1}{x}}\right)} = \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{\ln(x)}{x}} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} &\overset{``\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{\ln(x)}{x}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{-0} = 1
\end{aligned}$$

קיבלנו כי הגבול קיים והוא שווה ל־1 ולכן $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ כאשר $n \to \infty$ והטור לא מתכנס (אם היה מתכנס אז הסדרה הייתה שואפת ל־0).

2. נסתכל על הסכומים החלקיים של הטור. הסכום החלקי ה־k של הטור הוא

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) &= \sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \\
&= \sqrt{k+2} - \sqrt{2} - \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{1}\right) = \\
&= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} - \sqrt{2} + \sqrt{1} = \\
&= \frac{(k+2) - (k+1)}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} - \sqrt{2} + \sqrt{1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} - \sqrt{2} + \sqrt{1} \to 1 - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

כאשר $k \to \infty$ ולכן הטור מתכנס ל־ $1 - \sqrt{2}$.

תרגיל 8.5 קבעו האם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?.$$

פתרון: הסכום החלקי ה־k של הטור הוא

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\left(k+1\right)}= \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)= \\ &= 1-\frac{1}{k+1}\to 1 \end{aligned}$$

כאשר $k\to\infty$ ולכן הטור מתכנס.

תרגיל 8.6 הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ מתבדר.

פתרון: נזכור תחילה את טענה 6.21 שאומרת שהסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה ל־e. נבדוק לאן שואפת הסדרה $a_n=\frac{e^n n!}{n^n}$. נוכיח שהסדרה היא מונוטונית עולה ולכן $a_n\nrightarrow 0$ ובפרט, הטור לא מתכנס. צריך להראות ש־

$$a_{n+1}>a_n\,,$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\,.$$

נחשב את היחס הנתון.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}}= \\ &= \frac{e\left(n+1\right)n^n}{\left(n+1\right)^{n+1}}= \\ &= e\frac{n^n}{\left(n+1\right)^n}= \\ &= e\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

אנו יודעים כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ זה ביטוי מונוטוני עולה ל־e ולכן $e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, או לחילופין $\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$ ולכן הטענה נובעת.

תרגיל 8.7 הוכיחו כי הטור ההרמוני מתבדר.

פתרון: נתחיל מחישוב של הסכום החלקי S_{2^n}.

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots> \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots= \\ &= 1+\frac{2^0}{2^1}+\frac{2^1}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{2^n}= \\ &= 1+\frac{n}{2}>\frac{n}{2} \end{aligned}$$

קיבלנו שהסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה לא חסומה ובנוסף מדובר בסדרה מונוטונית עולה ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ והטור מתבדר.

תרגיל 8.8 הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

פתרון: נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים של הטור. נשים לב שזו סדרה עולה כי

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

ובנוסף נשים לב כי הסדרה חסומה ולכן מתכנסת.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \\ &< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,n} \end{aligned}$$

וראינו בתרגיל קודם כי הסדרה הזאת חסומה מלעיל על ידי $0 < S_n < 2$ ובפרט הטור מתכנס.

8.2 משפטי השוואה ומבחני התכנסות לטורים

8.2.1 זנב של טור מתכנס

כל טור ניתן לפרק ל־2 חלקים, ההתחלה הסופית שלו והזנב שלו. לדוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n}$$

כאשר בצורה די אינטואיטיבית אנחנו יכולים להבין שהסכום הראשון הוא סופי מאחר ומדובר במספר סופי של איברים ואילו הזנב הוא מה שקובע למעשה אם הטור מתכנס או לא. נקרא ל־ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ הזנב ה־k של הטור.

משפט 8.9 יהי טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1. אם הטור מתכנס, אז כל זנב של הטור מתכנס.
2. אם קיים זנב מתכנס לטור (ז"א, קיים k כך ש־ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס), אזי הטור עצמו מתכנס.

8.2.2 טורים חיוביים וקריטריוני השוואה בינהם

הגדרה 8.10 אם הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מורכב רק מאיברים אי־שליליים, אזי הטור ייקרא חיובי.

משפט 8.11 בטור חיובי סדרת הסכומים החלקיים היא מונוטונית עולה. אם $(S_N)_{N=k}^{\infty}$ היא חסומה מלעיל אזי היא מתכנסת כסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן הטור מתכנס. אם הסדרה לא חסומה מלעיל אזי הטור מתבדר (לא מתכנס).

באופן כללי, אנחנו יכולים לבצע השוואה בין צמד סכומים במספר אופנים ובעזרת תכונות ידועות של טור אחד, לקבוע תכונות בטור השני. המשפטים הבאים מראים כיצד ניתן לבחון התכנסות של טורים במקביל על ידי השוואה בינהם.

משפט 8.12 יהיו טורים חיובים $\sum_{n=k}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=k}^{\infty} b_n$ כאשר $b_n \geq a_n$ לכל $n \geq k$. אזי

1. אם $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס .
2. אם $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ מתבדר.

משפט 8.13 (קריטריון השוואה גבולי) יהיו צמד טורים חיובים $\sum_{n=k}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=k}^{\infty} b_n$ כאשר $b_n \neq 0$ לכל $n \geq k$ ו־ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ עם $0 < L < \infty$. אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

זאת אומרת, משפט 8.13 אומר שתחת ההנחות הנ"ל, כאשר טור אחד מתבדר גם השני מתבדר וכאשר אחד מהטורים מתכנס גם השני יתכנס.

משפט 8.14 (קריטריון השורש) יהי טור חיובי $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ונניח שהגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = L .$$

אזי, אם $L < 1$ הטור מתכנס ואם $L > 1$ הטור מתבדר.

קריטריון דומה לקריטריון השורש זה קריטריון המנה. קריטריון המנה קובע שאם קיים גבול למנה של שני איברים עוקבים בסדרה, אז הטור מתכנס בהתאם לערכו של הגבול הזה, ובאופן מפורש:

משפט 8.15 (קריטריון המנה) יהי טור חיובי $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ובו כל האיברים גדולים ממש מ־0. נניח שהגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L .$$

אזי, אם $L < 1$ הטור מתכנס ואם $L > 1$ הטור מתבדר.

תרגיל 8.16 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ מתכנס או מתבדר?

פתרון: נשים לב כי $\ln(1+x) < x$ לכל $x > -1$ ולכן אם $x = \frac{1}{n}$ אזי

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= x - \ln(1+x) > 0 \end{aligned}$$

ולכן הטור הוא טור חיובי. נראה כעת שניתן לחסום את $\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$ על ידי $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ומאחר וזו סדרה טלסקופית והטור שלה מתכנס, גם הטור המקורי יתכנס לפי משפט 8.12.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n+1} &> \ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)= \\
&= \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)= \\
&= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)= \\
&= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

והטור מתכנס בגלל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ מתכנס.

תרגיל 8.17 נתון כי הטורים $\sum_{n=k}^{\infty}b_n^2,\ \sum_{n=k}^{\infty}a_n^2$ מתכנסים. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. הטור $\sum_{n=k}^{\infty}|a_nb_n|$ מתכנס.
2. הטור $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ מתכנס.
3. הטור $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ מתכנס.

פתרון: נענה על כל סעיף בנפרד.

1. הטור מתכנס ונראה זאת על ידי השוואה לטורים המקוריים.

$$\begin{aligned}
0 &\le (a_n-b_n)^2= \\
&= a_n^2-2a_nb_n+b_n^2 \\
\Rightarrow 2a_nb_n &\le a_n^2+b_n^2
\end{aligned}$$

בנוסף,

$$\begin{aligned}
0 &\le (a_n+b_n)^2= \\
&= a_n^2+2a_nb_n+b_n^2 \\
\Rightarrow -a_n^2-b_n^2 &\le 2a_nb_n
\end{aligned}$$

זאת אומרת, קיבלנו ש־

$$-a_n^2-b_n^2\le 2a_nb_n\le a_n^2+b_n^2,$$

ובפרט

$$|2a_nb_n| \le a_n^2 + b_n^2 \, .$$

לכן לפי משפט השוואה הטור $\sum_{n=k}^{\infty} |2a_nb_n|$ מתכנס מאחר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$ מתכנס כסכום של שני טורים מתכנסים ולכן הטור המקורי גם מתכנס.

2. נשים לב ש־

$$0 \le (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 \le a_n^2 + 2\,|a_nb_n| + b_n^2 .$$

וידוע כי הטורים $\sum_{n=k}^{\infty} a_n^2, \; \sum_{n=k}^{\infty} b_n^2$ ו־ $\sum_{n=k}^{\infty} |2a_nb_n|$ מתכנסים ולכן גם הטור $\sum_{n=k}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

3. נגדיר $c_n = \frac{1}{n}$. אנו יודעים ש־ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n^2, \; \sum_{n=k}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנסים ולכן לפי הסעיף הראשון נובע ש־ $\sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| = \sum_{n=k}^{\infty} |a_nc_n|$ מתכנס.

תרגיל 8.18 הוכיחו התכנסות / התבדרות הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2-1} \cdot 3^n}$.

פתרון: נשתמש בקריטריונים שראינו עד כה בכדי לענות על הסעיפים הנ"ל.

1. תחילה צריך לשים לב שהטור הוא טור חיובי מאחר ו־ $\cos\left(\frac{1}{n}\right) < 1$. ניקח את הסדרה $b_n = \frac{1}{n^2}$ ונחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \\
&\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2\frac{1}{x^3}} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2\frac{1}{x}} = \\
&\underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{2t} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ולפי משפט 8.13 הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ מתכנס.

2. נשתמש במבחן המנה, משפט 8.15, בכדי לבדוק את התכנסות הטור.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{10^n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}}{n^{10}10} = \\ &= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \\ &= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{10} < 1\end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס.

3. נשתמש בקריטריון השורש בכדי להראות שהטור מתכנס.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2-1}\cdot 3^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{3n^{n-\frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}n^{\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n n^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

נמצא את הגבול $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$ ונשתמש בכללי אריתמטיקה של גבולות.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} &= \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \\ &= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}} = 1\end{aligned}$$

ולכן נובע ש־

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\cdot e\cdot 1 < 1$$

והטור המקורי מתכנס.

תרגיל 8.19 הוכיחו התכנסות / התבדרות הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{10^n+\sqrt{n}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{4^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^3(t)}{t}dt\right)$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{(n+3)^3}+\frac{\arctan(n)}{n^2}\right)$.

פתרון: נשתמש בכלל המשפטים שראינו עד כה בכדי לבחון את התכנסות הטורים הנ"ל.

1. נתחיל בכך ש־

$$\frac{n^8}{10^n+\sqrt{n}}<\frac{n^8}{10^n}<\frac{n^{10}}{10^n},$$

וראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$ מתכנס ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{10^n+\sqrt{n}}$ מתכנס.

2. נמצא חסם עליון על כל איבר בטור החיובי הנתון.

$$\frac{2-(-1)^n}{4^n}\leq\frac{3}{4^n}$$

ואנו יודעים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}$ מתכנס כסכום סדרה הנדסית ולכן גם הטור המקורי מתכנס.

3. נשתמש במשפט 8.14 בכדי להוכיח שהטור אכן מתכנס.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1\end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס.

4. תחילה נבחין כי מדובר בטור חיובי מאחר ו־ $\frac{\sin(t)}{t}>0$ בקטע $\left(0,\frac{1}{n}\right)$. כעת נמצא חסם על $\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^3(t)}{t}dt$.

$$\begin{aligned}\sin(t) &\leq t\\ \frac{\sin^3(t)}{t} &\leq \frac{t^3}{t}=t^2\\ \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^3(t)}{t}dt &\leq \int_0^{\frac{1}{n}}t^2dt=\frac{1}{3n^3}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin^3(t)}{t}dt\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3}<\infty\end{aligned}.$$

5. בסעיף זה נשתמש בסדרה $b_n = \frac{1}{n^2}$ ומשפט 8.13 .

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+3)^3}+\frac{\arctan(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,n^2}{(n+3)^3}+\arctan(n) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2}{n^3+9n^2+27n+27}+\arctan(n) = \\ &= 1+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס.

8.3 טורים ואינטגרלים

בשל הדימיון הרב בין טורים ואינטגרלים והעובדה שאינטגרל מסויים למעשה מוגדר בעזרת גבול של טור, אנחנו יכולים למצוא דרך להשתמש בהגבלה הזאת בכדי לחשב טורים בצורה קלה, או לפחות לקבוע האם הם מתכנסים או לא. אחת הדרכים הבסיסיות היא להשוות את הטור לאינטגרל בעזרת פונקציה המזדהה עם הסדרה על הנקודות הרלוונטיות ולבחון האם האינטגרל מתכנס.

משפט 8.20 (מבחן האינטגרל) יהי $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ טור חיובי. נניח שקיימת פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל $x \geq k$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. f רציפה.
2. f מונוטונית יורדת.
3. לכל $n \geq k$, $f(n) = a_n$.

אזי מתקיים ש:

- אם $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי האינטגרל $\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.
- אם האינטגרל $\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס.

תרגיל 8.21 קבעו עבור אילו ערכי p הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p(n)}.$$

פתרון: נקבע p ונגדיר את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x\ln^p(x)}$ לכל $x \geq 2$. נשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק את התכנסות הטור הנ"ל. לשם כך נבדוק שהפונקציה עומדת בתנאים הרלוונטיים:

1. הפונקציה רציפה בתור מנה של פונקציות רציפות והמכנה אינו מתאפס בשום שלב (תמיד חיובי).

2. הפונקציה מונוטונית יורדת ונראה זאת בעזרת הנגזרת:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{x\ln^p(x)}\right]' = \\ &= \frac{0-\ln^p(x)-xp\ln^{p-1}(x)\frac{1}{x}}{(x\ln^p(x))^2} = \\ &= \frac{0-\ln^p(x)-p\ln^{p-1}(x)}{(x\ln^p(x))^2} < 0 \end{aligned}$$

לכל $x \geq 2$ ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת.

3. הפונקציה שווה לסדרה לכל $x \geq 2$, $x \in \mathbb{N}$.

לכן התנאים הבסיסיים למשפט מתקיימים. נבחן כעת מתי האינטגרל מתכנס.

$$\begin{aligned} \int_2^\infty f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^p(x)}dx = \\ &\underset{y=\ln(x),\ \ dy=\frac{1}{x}dx}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^p}dy = \\ &= \begin{cases} \lim_{b\to\infty}\left[\ln(y)\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} & p=1 \\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(y)^{1-p}}{1-p}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} & p\neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(b))-\ln(\ln(2))\right] & p=1 \\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln(b))^{1-p}}{1-p}-\frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p}\right] & p\neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \infty & p=1 \\ -\frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p} & p>1 \\ \infty & p<1 \end{cases} \end{aligned}$$

לכן קיבלנו שעבור $p \leq 1$ הטור לא מתכנס ואחרת הטור מתכנס.

תרגיל 8.22 הוכיחו כי קיימים קבועים $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$c_1\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < c_2\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

פתרון: נבצע את הוכחה זאת בשלבים. תחילה נסתכל על הטור $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ ונראה שהוא שווה ל־ $\ln(n!)$. השיווין הזה נובע מתכונות הלוגרתימם,

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

כעת נמצא חסם על הטור הנ"ל מלמטה ומלמעלה. ניקח את הפונקציה $f(x) = \ln(x)$ ונשים לב שלכל $k \in \mathbb{N}$, $k \le x \le k+1$ מתקיים ש־

$$\ln(k) \quad \le \ln(x) \le \quad \ln(k+1)$$

מאחר והפונקציה היא פונקציה מונוטונית עולה ממש. לכן

$$\begin{aligned} 1 \cdot \ln(k) &\le \int_k^{k+1} \ln(x)\,dx \le && 1 \cdot \ln(k+1), \\ \sum_{k=1}^{n} \ln(k) &\le \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx \le && \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1). \end{aligned}$$

בפרט קיבלנו שהטור חסום מלמעלה על ידי האינטגרל ולכן

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \le \\ &\le \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx = \\ &= [x\ln(x) - x]_1^{n+1} = \\ &= [(n+1)\ln(n+1) - n - 1 - 0 + 1] \end{aligned}$$

ניקח אקספוננט בצמד האגפים (אפשרי כי מדובר בפונקציה מונוטונית עולה) ונקבל

$$\begin{aligned} n! &\le e^{(n+1)\ln(n+1) - n} = \\ &= e^{(n+1)\ln(n+1)} e^{-n} = \\ &= e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

באופן דומה נקבל חסם לכיוון השני,

$$\begin{aligned} \ln(n+1!) &= \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) \ge \\ &\ge \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx = \\ &= [x\ln(x) - x]_1^{n+1} = \\ &= [(n+1)\ln(n+1) - n - 1 - 0 + 1] \end{aligned}$$

על כן ניקח אקספוננט בשני האגפים ונחלק ב־ $(n+1)$,

$$\begin{aligned}
(n+1)! &\geq e^{(n+1)\ln(n+1)-n}\\
n! &\geq \frac{1}{n+1}e^{-n}\left(n+1\right)^{n+1}\\
&= e^{-n}\left(n+1\right)^{n}\\
&= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n}>\\
&> \left(\frac{n}{e}\right)^{n}
\end{aligned}$$

והטענה נובעת.

תרגיל 8.23 תהיי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. הוכיחו או הפריכו:

1. אם $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתכנס, אז $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

פתרון: בצמד הסעיפים הטענה לא נכונה. עבור הסעיף הראשון ניקח דוגמא נגדית בה

$$f(x) = \begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ \frac{1}{x^2} & x\notin\mathbb{N}\end{cases}.$$

במקרה כזה ברור ש־

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$$

לא מתכנס. לעומת זאת,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx=\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)\,dx\right]=\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}dx\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1<\infty
\end{aligned}.$$

החישוב האחרון נכון מאחר והערך של פונקציה בנקודה אחת לא משפיע על ערך האינטגרל עצמו ולכן העובדה שהפונקציה מקבלת את הערך 1 על המספרים השלמים, לא משפיעה על החישוב.

באופן דומה נגדיר פונקציה חדשה ־

$$.f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{N} \\ 1 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

קל לראות ש־

$$,\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 > \infty$$

ובנוסף,

$$\begin{aligned} .\int_1^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx\right] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} 1dx\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2} = \infty \end{aligned}$$

מאותם שיקולים כמו קודם לכן.

תרגיל 8.24 קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או לא:

1. $.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+5}}{3^n n!}$
2. $.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n!)^2}$

פתרון: בצמד המקרים הנ"ל נשתמש במבחן המנה.

$$\begin{aligned} 1.\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+5}}{3^n n!} &= ? \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1+5}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{5^{n+5}}{3^n n!}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3(n+1)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס.

$$\begin{aligned}
2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n!)^2} &= \ ? \\
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1!)^2}{(2n+2!)^2}}{\frac{(n!)^2}{(2n!)^2}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\right]^2 = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)}\right]^2 = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2(2n+1)}\right]^2 = 0 < 1
\end{aligned}$$

והטור מתכנס.

8.4 טורים כלליים

עד כה דנו בעיקר בטורים חיוביים. כמובן שאלו מקרים מאוד ספציפיים ולא תמיד נפגוש טורים כאלה. במידה ונתון לנו טור שלילי, אז עדיין נוכל להשתמש באריתמטיקה של טורים חיובים וזאת על ידי היפוך הסימן וניתוח הטור החיובי המתאים. לאחר הניתוח פשוט נכפיל את התוצאה ב־(-1). לכן טורים שליליים אינם בעייתים באותה המידה. על כן, נעבור לדון בטורים כלליים, כאלו שהאיברים בהם אינם תמיד חיוביים או תמיד שליליים, אלא בעלי סימנים משתנים.

בכדי לנתח טורים שכאלה נצטרך מספר הגדרות נוספות. ההגדרות הללו יסייעו לנו להשתמש במה שלמדנו עד כה, גם עבור טורים כלליים.

הגדרה 8.25 (התכנסות בהחלט) יהי טור $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ כללי כלשהו. נאמר שהטור מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|<\infty$.

זאת אומרת, הטור מתכנס בהחלט אם הטור (החיובי) של ערכי הסדרה המקורית בערך מוחלט מתכנס. כעת נבדיל בין טורים המתכנסים ומתכנסים בהחלט בעזרת ההגדרה של התכנסות בתנאי.

הגדרה 8.26 (התכנסות בתנאי) יהי טור $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ כללי כלשהו. נאמר שהטור מתכנס בתנאי אם $\sum_{n=k}^{\infty}a_n<\infty$ אבל הטור לא מתכנס בהחלט.

ז"א, טור מתכנס בתנאי אם הוא עצמו טור מתכנס אבל הוא לא מתכנס בהחלט.

ישנו משפט מאוד חשוב שמסייע לנו לקשר בין התכנסות בהחלט להתכנסות.

משפט 8.27 אם $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

משפט 8.27 אומר שאנחנו יכולים לבחון התכנסות בהחלט של טור (וזה משהו שאנחנו יודעים לעשות מאחר ומדובר בטור חיובי). במידה ויש התכנסות בהחלט, אזי הטור מתכנס.

הערה 8.28 שימו לב שהכיוון השני איננו בהכרח נכון. קרי, אם הטור מתכנס, אין הדבר אומר שהוא מתכנס בהחלט ואנחנו נראה מספר דוגמאות לכך. כמו כן, במידה והטור לא מתכנס בהחלט, אנחנו לא יכולים להסיק דבר לגבי ההתכנסות שלו.

8.4.1 טור לייבניץ

מבין הטורים הכלליים, ישנו סוג אחד מעניין וזה טור לייבניץ. אלו טורים שמורכבים מסדרה מונוטונית יורדת, אבל בחישוב הטור האיברים מוכפלים ב־$+1$ ו־-1 לסירוגין ולכן גורמים לטור להתכנס.

הגדרה 8.29 (טור לייבניץ) טור נקרא טור לייבניץ אם הוא מהצורה $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ כאשר $(a_n)_{n\geq 1}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת ל־0 (ז"א, מדובר בסדרה חיובית מונוטונית יורדת לאפס).

משפט 8.30 טור לייבניץ הוא טור מתכנס.

כמובן שהמשפט האחרון מאוד חשוב בכל הנוגע להתכנסות טורים מהצורה של טור לייבניץ. האינטואיציה מאחורי המשפט היא די נחמדה ופשוטה. מאחר ואיברי הטור תמיד מחליפים סימן אז ככל שהטור מתקדם, אנחנו מוסיפים ומורידים ערכים לסירוגין בגדלים הולכים וקטנים. לכן אם נסתכל על הסכומים החלקיים, לעולם לא נחרוג מהערך של האיבר הראשון, כי תמיד נוסיף ונחסר איברים הקטנים ממנו לסירוגין.

תרגיל 8.31 האם הטור הבא מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר ־

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

פתרון: עבור התכנסות בהחלט נצטרך לבדוק את התכנסות הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

נשים לב שלכל $n\geq 1$ מתקיים

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{n}$$

ובגלל התבדרות הטור ההרמוני, גם הטור הנוכחי מתבדר. בכדי להראות שהטור מתכנס בתנאי, נוכיח שהסדרה היא מונוטונית יורדת ושואפת לאפס.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\ &= 0\cdot e = 0\end{aligned}$$

כאשר יש לנו פונקציה חסומה כפול פונקציה המתאפסת. על כן, מתקיים שהסדרה מתכנסת לאפס. נוכיח שהיא מונוטונית יורדת.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \\
&= \frac{n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{n+1\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \\
&= \frac{n^{n+1}\left(n+2\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)^{n+1}\left(n+1\right)^{n+1}} = \\
&= \frac{n^{n+1}\left(n+2\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)^{2n+2}}
\end{aligned}$$

נכניס את כל הביטויים תחת אותה החזקה ונבחן את השבר שבסוגריים.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left[\frac{n\left(n+2\right)}{\left(n+1\right)^2}\right]^{n+1} = \\
&= \left[\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right]^{n+1} < \\
&< \left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1}\right]^{n+1} = 1
\end{aligned}$$

לסיכום, קיבלנו ש־ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת. מכאן נסיק שתנאי המשפט עבור טור לייבניץ מתקיים והטור מתכנס בתנאי.

תרגיל 8.32 הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n}{3^n}$ מתכנס ומצאו חסם עליון וחסם תחתון על ערכי הטור.

פתרון: נוכל להוכיח התכנסות בהחלט ואז נקבל התכנסות של הטור ונוכל גם להשתמש במבחן לייבניץ. נפתור בשתי הדרכים.

1. בכדי להראות שהטור מתכנס בהחלט, נרצה להוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ מתכנס. נשתמש במבחן המנה בכדי להראות זאת.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1
\end{aligned}$$

על כן, הטור מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

2. נראה שהסדרה $(|a_n|)_{n\geq 1}$ היא מונוטונית יורדת ושואפת לאפס.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3} = \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3} < \\ &< 2\cdot\frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת ו־

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln(3)\,3^x} = 0$$

שואפת לאפס. לכן, זהו טור לייבניץ שמתכנס.

מציאת החסם היא הרבה יותר קלה, מאחר ואנו יודעים ש־ $0 < \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n} < a_1 = \frac{1}{3}$.

תרגיל 8.33 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n}$ מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר.

פתרון: התכנסות בהחלט היא קלה לבדיקה מאחר ו־ $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ לכל $n > 3$ ולכן הזנב של הטור הנתון (עם ערכים מוחלטים) גדול מהזנב של הטור ההרמוני ובפרט מתבדר. מכאן נובע שהטור אינו מתכנס בהחלט. נבדוק אם התנאים להתכנסות בתנאי מתקיימים.

- האם הסדרה $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ היא מונוטונית יורדת? נסתכל על הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ ונוכיח שהיא מונוטונית יורדת.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]' = \\ &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln(x)}{x^2} = \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2} < 0\end{aligned}$$

  לכל $x \geq 3$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת עבור $n \geq 3$.

- אנו יודעים ש־$f(x) \to 0$ כאשר $x \to \infty$ ולכן התנאים להתכנסות בתנאי מתקיימים.

לכן הטור מתכנס בתנאי.

תרגיל 8.34 מצאו האם הטור מתכנס

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lfloor n/2\rfloor}$$

ומצאו לאן הוא מתכנס.

פתרון: נשים לב מדובר בטור לייבניץ (סדרה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס ולכן הטור מתכנס). נמצא לאן הטור מתכנס על ידי חישוב הסכומים החלקיים שלו. נסתכל על הסכומים החלקיים הנגמרים במספר אי־זוגי ועל הסכומים החלקיים הנגמרים במספר זוגי - בדרך זה נראה ששניהם שואפים לאפס ובפרט הטור שואף לאפס.

$$\begin{aligned}
S_{2N+1} &= (a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2N}+a_{2N+1}) = \\
&= \left(\frac{1}{\lfloor\frac{2}{2}\rfloor}-\frac{1}{\lfloor\frac{3}{2}\rfloor}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\frac{4}{2}\rfloor}-\frac{1}{\lfloor\frac{5}{2}\rfloor}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\lfloor\frac{2N}{2}\rfloor}-\frac{1}{\lfloor\frac{2N+1}{2}\rfloor}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N}\right) = \\
&= 0+0+\cdots+0=0
\end{aligned}$$

עבור הסכומים החלקיים שנגמרים באיבר זוגי נקבל,

$$\begin{aligned}
S_{2N} &= S_{2N-1}+a_{2N} = \\
&= 0+\left(\frac{1}{\lfloor\frac{2N}{2}\rfloor}\right) = \\
&= \frac{1}{N}\to 0
\end{aligned}$$

כאשר $N\to\infty$, ולכן הטור המקורי שואף לאפס.

תרגיל 8.35 האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ כאשר

$$.a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n \ is \ even \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

מתכנס או מתבדר?

פתרון: אומנם מדובר בטור מתחלף, אבל נשים לב שהוא לא מורכב כמו טור לייבניץ מסדרה מונוטונית יורדת ולכן לא נוכל להשתמש במה שראינו עד כה. למעשה הטור הנוכחי מתבדר ונוכיח זאת באופן הבא. נסתכל על הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ונגדיר את M_N להיות הסכום החלקי של הטור ההרמוני, קרי

$$.M_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

אנחנו יודעים ש־$M_N \to \infty$ כאשר $N \to \infty$. נשווה את M_N לסכום החלקי S_{2N} של הטור הנתון.

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} a_n = \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2N-1} + a_{2N} = \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \cdots + 0 + \frac{1}{2N} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2N} = \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right] = \\ &= \frac{1}{2}M_N \end{aligned}$$

וקיבלנו ש־ $S_{2N} = \frac{1}{2}M_N$ לכן $S_{2N} \to \infty$ כאשר $N \to \infty$ ובפרט הטור הנתון מתבדר.

תרגיל 8.36 הצדיקו את התכנסות הטורים הבאים וחשבו את הטור הבא

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)\,2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)\,2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

פתרון: נתחיל עם הטור השמאלי מהצמד. נסתכל על $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. הטור מורכב מסכום של שני טורים למעשה

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

הטור הימני הוא טור לייבניץ מאחר ו־$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ולכן הטור מתכנס. הטור השמאלי הוא טור חיובי ובנוסף

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,2n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 < \infty$$

ולכן מתכנס. על כן, מאריתמטיקה של טורים מתכנסים נובע ש־

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)\,2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) < \infty$$

באופן דומה ומאותם שיקולים נובע שגם הטור הימני $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ מתכנס. לכן הסכום של צמד הטורים הוא סופי. נגדיר

$$,b_n = \frac{1}{(2n+1)\,2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

נשתמש באריתמטיקה של טורים מתכנסים ונקבל

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)\,2n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{(2n+1)\,2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)\,2n}+\frac{1}{(2n+1)\,2n}\right)=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1+2n-1}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}\right)=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n-1)\,(2n+1)}\right)=\end{aligned}$$

נפצל את השבר לשני שברים נפרדים,

$$.\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

נשים לב שמדובר בטור טלסקופי ו־

$$\begin{aligned}S_k &= \frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}=\\ &=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}=\\ &=1-\frac{1}{2k+1}\to 1\end{aligned}$$

כאשר $k\to\infty$ ולכן סכום הטורים הנתונים מתכנס ל־1.

8.4.2 תרגילים כלליים בטורים

תרגיל 8.37 הוכיחו כי לכל $a>0$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(\ln(n))^{-a}$ מתבדר.

פתרון: יהי $a>0$. נוכיח כי $(\ln(n))^a<n$ החל מ־N כלשהו והלאה, ולכן הזנב של הטור הנתון $\sum_{n=2}^{\infty}(\ln(n))^{-a}$ גדול מהזנב של הטור ההרמוני $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ ומכאן נובע שהטור הנתון מתבדר גם כן. בכדי להראות זאת נוכיח כי

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^a(n)}=\infty$$

נבצע חישוב ישיר בעזרת כלל לופיטל ונקבל,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^a(n)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^a(x)}=\\ &\overset{``\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{a\ln^{a-1}(x)\cdot\frac{1}{x}}=\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{a\ln^{a-1}(x)}.\end{aligned}$$

נמשיך באותו האופן בצורה אינדוקטיבית m פעמים עד שנקבל $a-m<0$ ואז

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{a}(n)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{a(a-1)\cdots(a-m+1)\ln^{a-m}(x)} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^{|m-a|}(x)}{a(a-1)\cdots(a-m+1)} = \infty.\end{aligned}$$

לסיכום קיבלנו ש־ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{a}(n)}=\infty$ לכן נובע שמנקודה מסויימת N והלאה $\frac{n}{\ln^{a}(n)}>1$ ובפרט הטענה נובעת.

תרגיל 8.38 נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$, $a_n>0$. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

פתרון: נוכיח תחילה טענה פשוטה. נראה כי לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־ $2ab\le a^2+b^2$.

$$\begin{aligned}0 &\le (a-b)^2\\ 0 &\le a^2-2ab+b^2\\ 2ab &\le a^2+b^2.\end{aligned}$$

כיצד זה מסייע לנו? ובכן, לפי הטענה הנ"ל נובע ש־

$$\begin{aligned}2\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n} &\le (\sqrt{a_n})^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\\ \frac{\sqrt{a_n}}{n} &\le \frac{1}{2}\left[a_n+\frac{1}{n^2}\right],\end{aligned}$$

ולכן, לפי מבחן השוואה של טורים חיוביים נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n} \le \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right]<\infty.$$

תרגיל 8.39 קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots(4n-3)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{(n+2)\cdot(n+3)\cdots(2n+1)}$.

פתרון:

1. נסתכל על הסכום החלקי S_k ונראה שמדובר בסכום טלסקופי.

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \\ &= -\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) \\ &= -\left(\sqrt{1}-\sqrt{1+1}+\sqrt{2}-\sqrt{2+1}+\cdots+\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right) = \\ &= -\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right) = \\ &= -1+\sqrt{k+1}\to\infty \ \text{ as } k\to\infty. \end{aligned}$$

2. נשתמש במבחן המנה ונקבל,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot5\cdots(3n-1)(3(n+1)-1)}{1\cdot5\cdots(4n-3)(4(n+1)-3)}}{\frac{2\cdot5\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots(4n-3)}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3(n+1)-1)}{(4(n+1)-3)} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)}{(4n+1)} = \frac{3}{4} < 1, \end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס.

3. נשתמש במבחן המנה ונקבל,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)(3(n+1)-2)}{(n+2)\cdot(n+3)\cdots(2(n+1)+1)}}{\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{(n+2)\cdot(n+3)\cdots(2n+1)}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3(n+1)-2)}{(2(n+1)+1)} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(2n+3)} = 1.5 > 1, \end{aligned}$$

ולכן הטור מתבדר.

תרגיל 8.40 הוכיחו כי

$$.\frac{39}{e^2} \le \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{e^n}\right] - \frac{3}{e} \le \frac{54}{e^2}$$

פתרון: לשם ההוכחה נשתמש במבחן האינטגרל ונראה ש־

$$\frac{39}{e^2} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{e^n}\right] - \frac{3}{e} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2-1}{e^n} \leq \frac{54}{e^2}.$$

נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{4x^2-1}{e^x}$ ונבחן האם הפונקציה מונוטונית יורדת.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8xe^x - e^x\left(4x^2-1\right)}{e^{2x}} = \\ &= \frac{8x-4x^2+1}{e^x} \end{aligned}$$

נשים לב שבמונה יש לנו פרבולה עם נקודת מקסימום ב־$x=1$ ובפרט נקבל שהפונקציה יורדת עבור $x \geq 3$. נחשב את האינטגרל הבא על הפונקציה בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{4x^2-1}{e^x}dx &= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_3^b + \int_3^b e^{-x}8xdx\right\} = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_3^b + \left[-8xe^{-x}\right]_3^b + 8\int_3^b e^{-x}dx\right\} = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_3^b + \left[-8xe^{-x}\right]_3^b - \left[8e^{-x}\right]_3^b\right\} = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-4x^2-8x-7}{e^x}\right]_3^b = \\ &= \frac{67}{e^3}. \end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{e^n}\right] - \frac{3}{e} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2-1}{e^n} \\ &= \frac{15}{e^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n^2-1}{e^n} \\ &> \frac{15}{e^2} + \frac{67}{e^3} > \frac{39}{e^2}. \end{aligned}$$

מאחר והפונקציה היא מונוטונית יורדת, אז בדומה להוכחה של מבחן האינטגרל נקבל שהטור מהאיבר $n=3$ גדול מהאינטגרל הנ"ל. זה נובע מכך שאם נשרטט את המלבנים שנקבעים ע"פ הטור (רוחב כל מלבן הוא 1 וגובהו כערך של כל איבר בטור) נראה שהפונקציה עוברת מתחת לצלע העליונה של כל אחד מהמלבנים. כאשר הפונקציה היא מונוטונית יורדת היא פוגשת את המלבנים שנקבעים על ידי הטור רק בערכים השלמים ובין ערכים שלמים היא נמצאת מתחת לגובה הרלוונטי. על כן הוכחנו את החסם התחתון. בכדי לחשב את החסם

העליון נחשב את האינטגרל מ־1 עד אינסוף. בצורה זאת נקבל שבכל מקטע הפונקציה גבוהה מכל מלבן רלוונטי ולכן נקבל חסם עליון.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{4x^2-1}{e^x}dx &= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_1^b + \int_1^b e^{-x}8xdx\right\} = \\
&= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_1^b + \left[-8xe^{-x}\right]_1^b + 8\int_1^b e^{-x}dx\right\} = \\
&= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_1^b + \left[-8xe^{-x}\right]_1^b - \left[8e^{-x}\right]_1^b\right\} = \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-4x^2+1-8x-8}{e^x}\right]_1^b = \\
&= \frac{19}{e^1} < \frac{54}{e^2},
\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 8.41 הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n n!}{n^n}$ מתכנס לכל $0 < a < e$ ומתבדר לכל $a \geq e$.

פתרון: נוכיח תחילה כי הטור מתבדר עבור $a = e$ ובעזרת השוואה בין טורים חיוביים יינבע ישירות כי הטור מתבדר לכל $a > e$. נזכור כי הוכחנו בעבר (תרגיל (??)) שהסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה ל־e ובפרט $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ לכל n טבעי. נסתכל על הסדרה $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$. נוכיח שהסדרה היא מונוטונית עולה ולכן $a_n \nrightarrow 0$ ובפרט, הטור לא מתכנס. צריך להראות ש־

$$a_{n+1} > a_n,$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

נחשב את היחס הנתון.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \\
&= \frac{e\left(n+1\right)n^n}{\left(n+1\right)^{n+1}} = \\
&= e\frac{n^n}{\left(n+1\right)^n} = \\
&= e\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

אנו יודעים כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ זה ביטוי מונוטוני עולה ל־e ולכן $e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, או לחילופין $\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$ ולכן הטענה נובעת. נעבור כעת להוכיח שהטור מתכנס לכל $a < e$. נשתמש

במבחן המנה לשם כך.

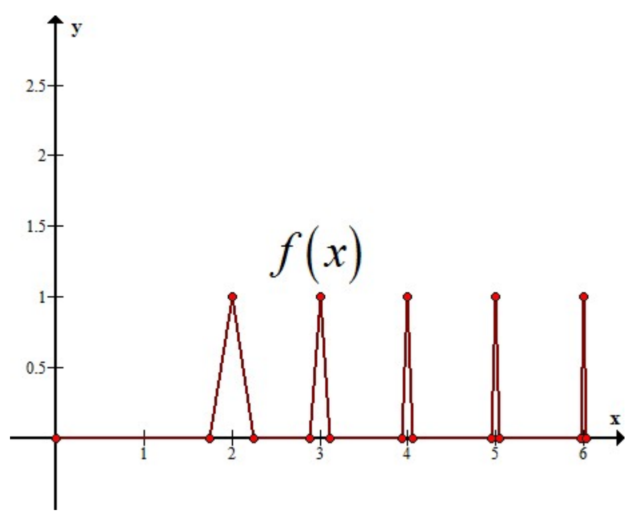
$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e} < 1 \end{aligned}$$

ולכן הטור מתכנס.

תרגיל 8.42 הוכיחו או הפריכו ־ אם $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה ואי־שלילית כך ש־ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתכנס.

פתרון: טענה לא נכונה ונוכיח זאת בעזרת דוגמא. נתאר פונקציה רציפה, אי־שלילית שהאינטגרל שלה מתכנס אבל הטור הנתון לא מתכנס. לשם הפשטות נמנע מתיאור אלגברי של הפונקציה ורק נסביר את צורתה. נבנה תחילה מעט כלי עזר. נניח כי סביב כל נקודה $2\le n\in\mathbb{N}$ יש משולש סימטרי סביב n ברוחב $\frac{1}{n^2}$ ובגובה 1. זאת אומרת, ניקח את ציר המספרים וסביב המספר 2, לדוגמא נצייר קו באורך $\frac{1}{4}$, קרי הקטע $\left[2-\frac{1}{4},2+\frac{1}{4}\right]$ ונמתח קן מקצוות הקטע לנקודה $(2,1)$ הנמצאת בגובה 1 מעל לנקודה 2. לדוגמא עבור $n=10$ נסתכל על המשולש בגובה 1שבסיסו הוא הקטע $\left[10-\frac{1}{100},10+\frac{1}{100}\right]$ והקודקוד שלו הוא מעל הנקודה 10בגובה 1. לאחר ציור כל המשולשים הנ"ל נחבר בינהם בעזרת קו שנע על ציר ה־x ונקבל למעשה פונקציה כפי שמוצגת בתרשים 27:

נשים לב שמדובר בפונקציה רציפה ואי־שלילית והאינטגרל המסויים הנתון בשאלה הוא



איור 27: פונקצה רציפה ואי־שלילית עבורה $\int_0^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתבדר.

למעשה השטח שבין גרף הפונקציה וציר x. במקרה הנוכחי מדובר בסכום השטחים של המשולשים. השטח של כל משולש מעל נקודה n הוא

$$S_{Triangle} = \frac{1 \cdot \frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

ואם נחשב את הסכום $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ נקבל שהטור מתכנס וזהו מספר סופי. יחד עם זאת הטור המדובר בשאלה מתבדר כי $f(n) = 1$ לכל $n \geq 2$ ולכן

$$.\sum_{n=2}^{N} f(n) = \sum_{n=2}^{N} 1 = N - 1 \to \infty \quad \text{as} \quad N \to \infty$$

8.5 טורי חזקות

עד כה ראינו טורים שמורכבים רק ממספרים. הטורים יכלו להתכנס או לא להתכנס ובנוסף יכלו להתכנס במובן הרחב (אינסופיים). ישנם סוגים נוספים של טורים ואלו טורי החזקות. טורי חזקות אלו טורים שהם למעשה פונקציות. בטורים ישנו משתנה כלשהו והטורים מקבלים ערכים שונים כפונקציה של אותו המשתנה x.

הגדרה 8.43 (טור חזקות) טור חזקות סביב הנקודה x_0 זה טור מהצורה

$$.\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

בצורה שכזאת הגדרנו טור חזקות כללי. מקרה ספציפי וחשוב הוא כאשר $x_0 = 0$. במצב כזה קוראים לטור ־ טור מקלורן.

בדומה לטורים שראינו עד כה, גם עבור טורי חזקות נשאלת השאלה ־ מתי הם מתכנסים? כעת, ההתכנסות הינה פונקציה של x.

הגדרה 8.44 תחום ההתכנסות של טור חזקות זה קבוצת כל ה־x עבורים הטור מתכנס.

כאשר הטור מתכנס ב־x כלשהו, נוכל לסמן $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. שימו לב שטור חזקות כללי תמיד ניתן להצגה כטור מקלורן על ידי החלפת משתנים $t = x - x_0$.

משפט 8.45 (משפט אבל) יהי טור חזקות סביב הנקודה x_0 ונניח שהטור מתכנס בנקודה $x_1 \neq 0$. אזי בכל נקודה x_2 כך ש־ $|x_0 - x_2| < |x_0 - x_1|$ הטור מתכנס.

ישנן מספר מסקנות מידיות הנובעות ממשפט אבל:

1. הטור מתכנס תמיד בנקודה $x = x_0$.
2. אם הטור מתבדר בנקודה x_1 ו־ $|x_0 - x_1| < |x_0 - x_2|$, אזי הטור מתבדר בנקודה x_2.
3. קיים $0 \leq R \leq \infty$ הנקרא רדיוס התכנסות, כך שהטור מתכנס לכל $|x - x_0| < R$ ומתבדר לכל $|x - x_0| > R$. R נקרא רדיוס התכנסות.

8.5.1 רדיוס התכנסות

מציאת רדיוס התכנסות לטור נתון זו לא משימה קלה. לשם כך ישנם טכניקות שונות לחישוב רדיוס זה.

משפט 8.46 (נוסחת השורש ל-R) יהי טור חזקות ונניח שקיים הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(|a_n|\right)^{1/n}.$$

אזי רדיוס ההתכנסות הינו $R = \frac{1}{L}$.

שימו לב כי הגבול נלקח במובן הרחב, קרי L יכול להיות 0 או לחילופין ∞. בנוסף, אנו יודעים שהטור מתכנס עבור כל $|x| < R$ אבל עבור $x = \pm R$ צריך לבדוק ספציפית כל מקרה לגופו.

משפט 8.47 (נוסחת המנה ל-R) יהי טור חזקות ונניח שקיים הגבול

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

אזי רדיוס ההתכנסות הינו $R = \frac{1}{L}$.

תרגיל 8.48 מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} \cdot x^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} x^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} x^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n}}{4^{2n}}$.

פתרון: נפתור כל סעיף בנפרד.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} x^n \quad = \quad ?$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{1}{n^2 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע ש־ $R=2$. נבחן מה קורה עבור $x=\pm 2$. עבור $x=2$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}2^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

ואנו יודעים שמדובר בטור מתכנס. עבור $x=-2$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

וזה טור לייבניץ ובפרט מתכנס.

$$2.\quad \sum_{n=1}^{\infty} n!\cdot x^n = ?$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} n+1=\infty$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע שהטור מתכנס רק עבור $x=0$.

$$3.\quad \sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{-1}\cdot x^n = ?$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע ש־ $R=\infty$, ז"א, הטור תמיד מתכנס.

$$4.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}x^n = ?$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{n+1^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{n+1^{n+1}e^n n!}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n!\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n^n}{(n+1)^n}= \\
&= e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}= \\
&= e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}= \\
&= \frac{e}{e}=1
\end{aligned}$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע ש־ $R=1$. נבחן מה קורה עבור $x=\pm1$. עבור $x=1$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n} \quad = \quad ?.$$

נבדוק לאן שואף האיבר הכללי. ראינו בעבר שהסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה ל־e. נוכיח בעזרת זאת כי גם הסדרה הנתונה היא מונוטונית עולה ולכן לא שואפת ל־0. נשתמש בחישוב שביצענו כרגע ונקבל

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad = \quad \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$$

כי הסדרה היא מונוטונית עולה ולכן המכנה קטן מהמונה. על כן קיבלנו ש־ $a_{n+1}>a_n$ והסדרה לא שואפת לאפס. לכן הטור לא מתכנס ונקבל תוצאה דומה עבור $x=-1$.
לסיכום, הטור מתכנס לכל $x\in(-1,1)$.

$$5.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n \quad = \quad ?$$

נשתמש במבחן השורש בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^n+(-2)^n\right)^{1/n}}{n^{1/n}}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)^{1/n}}{n^{1/n}}= \\
&= \frac{3\cdot1}{1}=3
\end{aligned}$$

שימו לב שהגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)^{1/n}=1$ אינו טריוויאלי לחישוב. ניתן לבצע את החישוב הבא,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)^{1/n}}= \\ &= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}}=e^0=1\end{aligned}$$

לכן לפי מבחן השורש נובע ש- $R=\frac{1}{3}$. נבחן מה קורה עבור $x=\pm\frac{1}{3}$. עבור $x=\frac{1}{3}$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

נשים לב שמדובר בטור חיובי ובנוסף,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+n\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}= \\ &= \lim_{n\to\infty}1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n=1\end{aligned}$$

ומהתבדרות הטור ההרמוני גם הטור הנוכחי מתבדר. עבור $x=-\frac{1}{3}$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

וזה טור שמורכב מסכום של שני טורי לייבניץ מתכנסים ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$) ולכן בפרט מתכנס. קיבלנו שהטור המקורי מתכנס לכל $x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

$$6.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n(x-1)^{2n}}{(2n+1)!} = ?$$

נסמן $t=(x-1)^2$ ונקבל ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n(x-1)^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{(2n+1)!}t^n.$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\pi^{n+1}}{(2n+2+1)!}}{\frac{\pi^n}{(2n+1)!}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{n+1}(2n+1)!}{(2n+3)!\pi^n}= \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{(2n+2)(2n+3)}= \\ &= 0\end{aligned}$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע ש־ $R=\infty$. נבחן מה משמעות הדבר עבור הטור המקורי. אם רדיוס ההתכנסות שקיבלנו הוא R זאת אומרת שהטור מתכנס לכל $|t|<R$. לכן מכאן נובע שהטור המקורי מתכנס לכל

$$\begin{array}{rcl} & \left|(x-1)^2\right| & < R \\ & (x-1)^2 & < R \\ -\sqrt{R} < & (x-1) & < \sqrt{R} \\ -\sqrt{R}+1 < & x & < \sqrt{R}+1 \\ -\infty < & x & < \infty \end{array}$$

ובפרט, הטור המקורי מתכנס לכל x.

$$7.\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!} \quad = \quad ?$$

נסמן $t=(x-1)^2$ ונקבל ש

$$.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^n$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע ש־ $R=\infty$, ובפרט הטור המקורי מתכנס לכל x.

$$8.\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n}}{4^{2n}} \quad = \quad ?$$

נסמן $t=(2x+3)^2$ ונקבל ש

$$.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n}}{4^{2n}} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{4^{2n}}$$

נשתמש במבחן השורש בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$.\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4^{2n}}\right)^{1/n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

לכן לפי מבחן השורש נובע ש־ $R=16$. נבחן מה קורה עבור $t=\pm 16$. עבור $t=\pm 16$ נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm 1)^n 16^n}{4^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n$$

וטור זה אינו מתכנס מאחר והאיבר הכללי אינו שואף לאפס. לכן הטור מתכנס לכל $t\in(-16,16)$ והטור המקורי מתכנס לכל

$$\begin{aligned}
& \left|(2x+3)^2\right| && <16 \\
-4< & \quad 2x+3 && <4 \\
-7< & \quad 2x && <1 \\
.-3.5< & \quad x && <0.5
\end{aligned}$$

תרגיל 8.49 נניח שטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ הוא בעל רדיוס התכנסות R (לפי מבחן השורש). מה רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}x^n$?

פתרון: נוכל להשתמש במבחן השורש גם עבור הטור החדש ולקבל

$$.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{1/n}}{2}=\frac{L}{2}$$

נתון כי $R=\frac{1}{L}$. על כן הרדיוס התכנסות של הטור החדש הוא

$$.\frac{1}{\frac{L}{2}}=\frac{2}{L}=2R$$

תרגיל 8.50 נתון כי רדיוס ההתכנסות של הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ הם R_1,R_2 בהתאמה. מה ניתן לומר על רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$?

פתרון: הדבר הראשון שנוכל לקבוע הוא שלכל $|x|<\min\{R_1,R_2\}$ מתקיים שצמד הטורים מתכנסים ולכן מאריתמטיקה של טורים מתכנסים נובע שגם סכומם מתכנס.

כעת נניח ש־ $\min\{R_1,R_2\}<|x|<\max\{R_1,R_2\}$ (כמובן בהנחה שהרדיוסים שונים זה מזה). במצב כזה אנו יודעים שטור אחד מתבדר וטור אחר מתכנס. נניח בשלילה שסכוממם מתכנס ונניח בלי הגבלת הכלליות שגם $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס. לכן, לפי אריתמטיקה של טורים מתכנסים נובע שגם

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

מתכנס. סתירה. לכן הסכום של הטורים לא מתכנס. מהמסקנות שראינו קודם לכן נובע שרדיוס ההתכנסות של סכום הטורים הוא $R<\min\{R_1,R_2\}$ (תחת ההנחה שהרדיוסים שונים זה מזה).

תרגיל 8.51 מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n^2}$.

פתרון: נשתמש בקריטריונים שראינו עד כה בכדי למצוא את תחום ההתכנסות של הטורים הנתונים.

$$1.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2^n} \quad = \quad ?$$

במצב הנוכחי לא נוכל להשתמש בטכניקות שראינו עד כה מאחר ולא ניתן לעבור לצורה של טור מקלורן. נשים לב תחילה שעבור $x=\pm1$ הטור מתבדר מאחר והטור ההרמוני מתבדר ומאחר ו־ $(-1)^{2^n}=1$ לכל n טבעי. בנוסף, עבור $|x|>1$ אנו רואים שהאיבר הכללי לא יישאף לאפס ולכן בכל מקרה הטור לא יתכנס. לכן נותר לבדוק מה קורה עבור $|x|<1$. נוכיח כי במצב כזה הטור מתכנס. נשים לב שלכל n טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} 2^n &> n \\ |x|^{2^n} &< |x|^n \\ \frac{|x|^{2^n}}{n} &< \frac{|x|^n}{n}. \end{aligned}$$

כעת נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n}$ מתכנס. לשם כך נשתמש במבחן השורש לטורים חיוביים ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^n}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n^{1/n}}=|x|<1$$

ולפי מבחן השורש הטור מתכנס. לכן על פי משפט השוואה לטורים חיוביים גם הטור הנוכחי מתכנס אם ורק אם $x\in(-1,1)$.

$$2.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n^2} \quad = \quad ?$$

נתונה סיטואציה די דומה לתרגיל הקודם. גם במצב הנוכחי קל לראות שעבור $|x|>1$ האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור לא מתכנס ועבור $x=1$ מדובר בטור ההרמוני שמתבדר. עבור $|x|<1$ נוכל לבצע אותה השוואה כמו זו שביצענו קודם לכן ולקבל שלכל n טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} n^2 &\geq n \\ |x|^{n^2} &\leq |x|^n \\ \frac{|x|^{n^2}}{n} &\leq \frac{|x|^n}{n}, \end{aligned}$$

על כן הטור מתכנס עבור $x \in (-1,1)$. נותר לבדוק התכנסות עבור $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n^2} \quad = \quad ?.$$

עבור כל n טבעי וזוגי נקבל ש- $(-1)^n = 1 = (-1)^{n^2}$, אבל עבור n טבעי ואי־זוגי נקבל ש- n^2 הוא אי־זוגי ולכן

$$(-1)^n = -1 = (-1)^{n^2}.$$

לכן מתקיים השיוויון הבא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n^2},$$

וזה טור לייבניץ ובפרט מתכנס. לכן הטור מתכנס עבור $x \in [-1,1)$.

תרגיל 8.52 מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

פתרון: נתון טור חזקות

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \quad = \quad ?$$

נשתמש במבחן המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ולכן לפי מבחן המנה נובע ש- $R = 4$.

8.6 טורי טיילור

טור טיילור זה טור חזקות המקרב פונקציה כלשהי סביב נקודה מסויימת. טורי טיילור הם דרך להציג את הפונקציה ברמת דיוק מסויימת על ידי טור חזקות, מה שלעיתים מקל מאוד על הניתוח שלה מאחר ואנו יודעים כיצד נראה כל פולינום ולכן ניתן פשוט לשרטט סכום של פולינומים ולקבל קירוב לפונקציה הנתונה. נתחיל את הניתוח במספר פעולות מתמטיות שניתן לבצע על טורי חזקות.

8.6.1 גזירה ואינטגרציה של טורים

תהיי פונקציה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ונניח בנוסף שרדיוס ההתכנסות של הטור $R>0$. אזי f גזירה ואינטגרבילית בתחום ההתכנסות ו־

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}\,,$$

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\,.$$

המשפט נכון באופן כללי ומאפשר לנו לגזור ולבצע אינטגרציה על טורי חזקות בכלל ולא רק על טורי מקלורן כל עוד אנו מתייחסים לנקודות בתחום ההתכנסות. בנוסף המשפט הבא מראה שפונקציה הניתנת לייצוג על ידי טור חזקות, יש לה הצגה יחידה כטור.

משפט 8.53 נניח כי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ונניח בנוסף שרדיוס ההתכנסות של הטור $R>0$. אזי f גזירה אינסוף פעמים בנקודה $x=0$ ו־ $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ לכל n.

המשפט קובע שהמקדמים של הטור הם יחידים וניתנים לחישוב על ידי גזירת הפונקציה בנקודה $x=0$.

8.6.2 טור טיילור של פונקציה

הגדרה 8.54 תהיי פונקציה f הגזירה אינסוף פעמים בנקודה x_0. טור טיילור של f סביב הנקודה x_0 מוגדר להיות

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

הערה 8.55 שימו לב שבכדי שהטור הנ"ל לא בהכרח מוגדר היטב או מתכנס בנקודה x כלשהי ולכן חייבים לדעת את רדיוס ההתכנסות של הטור הנ"ל.

הגדרה 8.56 פונקציה היא אנליטית בנקודה x אם קיימת נקודה x_0 כך ש־

$$T_f(x)=f(x)$$

כאשר $T_f(x)$ זה טור טיילור של f סביב הנקודה x_0.

בצורה פשוטה, פונקציה נקראת אנליטית אם ניתן לפתח אותה כטור חזקות. כמובן שהטור חייב להתכנס בכדי שהשיוויון הנ"ל יוגדר היטב ולכן הדרישה היא ש־$T_f(x)$ מתכנס. ניתן להסתכל על טור טיילור עד דרגה מסויימת ואז מקבלים פולינום שנקרא פולינום טיילור.

הגדרה 8.57 פולינום טיילור מסדר N של הפונקציה f סביב הנקודה x_0 הוא

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

שימו לב ש־ $T_f(x) = f(x)$ אם ורק אם

$$\lim_{N\to\infty} T_N(x) = f(x).$$

בנוסף, פולינום טיילור מסדר N הוא פולינום מדרגה שהיא לכל היותר N.

פעמים רבות נרצה להסתכל על פולינום, סכום סופי, ולא על כל הטור. במקרים אלו חשוב לדעת מה השגיאה ביחס לפונקציה הנתונה. נקרא להפרש בין הפונקציה לפולינום טיילור מסדר N שלה ־ שארית טיילור,

$$R_N(x) = f(x) - T_N(x).$$

$R_N(x)$ זו שארית טיילור מסדר N של f סביב הנקודה x_0. מהגדרת השארית קל לראות ש־

$$f(x) = T_N(x) + R_N(x).$$

על כן, $T_f(x) = f(x)$ אם ורק אם $\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$.

משפט 8.58 (נוסחת השארית לפי לגראנג') תהי f פונקציה גזירה $N+1$ פעמים בקטע $[x_0,x]$. אזי קיימת נקודה $c\in[x_0,x]$ שעבורה

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}.$$

באופן דומה ניתן לנסח את המשפט עבור הקטע $[x,x_0]$.

הערה 8.59 השארית נתפסת לרוב כסטייה כלפי מטה או מעלה ולכן בד"כ נחשב אותה בערכה המוחלט.

8.6.3 טורי טיילור של פונקציות נפוצות

ישנן מספר פונקציות שלהן טורי טיילור מוכרים ויחסית שימושיים. נסקור את חלקן כעת. הפיתוחם מוצגים כטורי מקלורן, ז"א כאשר $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
1.\ \ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
2.\ \ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
3.\ \ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
4.\ \ \ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1] \\
5.\ \ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

כמובן שישנם רבים נוספים אשר גם נראה בהמשך.

תרגיל 8.60 פתחו את טור טיילור של e^x סביב $x_0 = 0$.

פתרון: לשם פיתוח הפונקציה הנ"ל בטור, נצטרך למצוא את הנגזרות שלה מכל הסדרים בנקודה $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{ccc}
f^{(0)}(x) = e^x & , & f^{(0)}(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) = e^x & , & f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) = e^x & , & f^{(2)}(0) = 1 \\
 & \vdots & \\
f^{(n)}(x) = e^x & , & f^{(n)}(0) = 1
\end{array}$$

נציב את התוצאות הנ"ל בטור ונקבל

$$\begin{aligned}
T_{e^x}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - 0)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 8.61 פתחו את $f(x) = \sqrt{x}$ לפולנום טיילור ממעלה 4 סביב הנקודה $x_0 = 1$ ומצאו עד כמה מדוייק הפיתוח של $\sqrt{2}$ בעזרת פולינום ממעלה 4. מה לגבי $\sqrt{0.5}$?

פתרון: לשם פיתוח הפונקציה הנ"ל בטור, נצטרך למצוא את הנגזרות שלה עד סדר רביעי.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= x^{\frac{1}{2}} &,\quad f^{(0)}(1) &= 1 \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} &,\quad f^{(1)}(1) &= \frac{1}{2} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} &,\quad f^{(2)}(1) &= -\frac{1}{4} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} &,\quad f^{(3)}(1) &= \frac{3}{8} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} &,\quad f^{(4)}(1) &= -\frac{15}{16}
\end{aligned}$$

לכן פולינום טיילור עד סדר 4 של $\sqrt{x}$ סביב הנקודה $x_0 = 1$ הוא

$$\begin{aligned}
T_4(x) &= \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \\
&= \frac{1}{0!}(x-1)^0 + \frac{1}{1!\cdot 2}(x-1)^1 - \frac{1}{2!\cdot 4}(x-1)^2 + \frac{3}{3!\cdot 8}(x-1)^3 - \frac{15}{4!\cdot 16}(x-1)^4 = \\
&= 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5(x-1)^4}{128}
\end{aligned}$$

נעבור לחישוב השארית של הפולינום מסדר רביעי. נשתמש בשארית לגראנג'

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5$$

כאשר $c \in (1,2)$ ונקבל,

$$\begin{aligned}
R_4(2) &= \frac{\frac{15\cdot 7}{32}c^{-\frac{9}{2}}}{5!}(2-1)^5 = \\
&= \frac{7}{256c^{9/2}} < \frac{7}{256}
\end{aligned}$$

עבור $x = 0.5$ היינו מקבלים ש־$c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ולכן

$$\begin{aligned}
\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\frac{\frac{15\cdot 7}{32}(c)^{-\frac{9}{2}}}{5!}\left(\frac{1}{2}-1\right)^5\right| < \\
&< \frac{7}{256}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{9}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{2}} = \\
&= \frac{7}{256\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

תרגיל 8.62 הוכיחו בעזרת טורי טיילור כי $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

פתרון: נתחיל בפיתוח של $\sin(x)$ כטור טיילור סביב $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \sin(x) & , & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) & , & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin(x) & , & f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos(x) & , & f^{(3)}(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) & , & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

כמו שניתן לראות, מהנגזרות הבאות נקבל את אותם הערכים כמו אלו שקיבלנו עד כה. לכן

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} & n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ובהצגה כטור

$$\begin{aligned} T_{\sin(x)}(x) &= \frac{1}{1!}(x-0)^1 - \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 - \cdots = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

נשים לב שטורים כאלה כבר ניתחנו ואנחנו יודעים שהם מתכנסים עבור כל x ממשי. בהמשך נוכיח כי השארית מתכנסת ל־ 0 בכל נקודה ולכן הטור הנ"ל שווה ממש ל־ $\sin(x)$. נשתמש בתוצאה זאת בכדי לחשב את הטור טיילור של $\frac{\sin(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \frac{\sin(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) = 1.$$

תרגיל 8.63 מצאו נגזרת מסדר n של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

בנקודה $x_0 = 0$.

פתרון: נשתמש בפיתוח של הפונקציה לטור טיילור בכדי למצוא את הנגזרת מסדר k.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \\
f^{(k)}(0) &= k!\cdot a_k \\
&= \begin{cases} 2n!\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} & k=2n\ (k\ is\ even), \\ 0 & k=2n+1\ (k\ is\ odd), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2n+1} & k=2n\ (k\ is\ even), \\ 0 & k=2n+1\ (k\ is\ odd), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k+1} & k\ is\ even, \\ 0 & k\ is\ odd. \end{cases}
\end{aligned}$$

תרגיל 8.64 מצאו פונקציה שהטור טיילור שלה הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)!}.$$

פתרון: נשתמש בטור טיילור של e^x.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \forall x\in\mathbb{R} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{(n+1)!}= \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}= \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{n!}= \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{n!}-1-\frac{x}{2}\right]= \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left[e^{\frac{x}{2}}-1-\frac{x}{2}\right]\quad \forall x\neq 0
\end{aligned}$$

כאשר $x=0$ הפונקציה שווה ל־0. לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)!} = \begin{cases} \frac{2}{x}e^{\frac{x}{2}}-\frac{2}{x}-1 & \forall x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

8.6.4 חישובי שארית

בכדי להראות שטור טיילור שווה ממש לפונקציה, צריך להוכיח שהשארית מתכנסת ל־0 כאשר $N\to\infty$. כמובן שאין סיבה שזה ייקרה בכל נקודה ולכן צריך לבחון את ההתכנסות של השארית בתחום ההתכנסות ולבחון מתי אכן הטור שווה לפונקציה עצמה. כעת נוכיח תוצאה בא כבר השתמשנו והיא שטור טיילור של e^{x} שווה לפונקציה עצמה (הוכחה זהה תעבוד גם עבור הטור של $\sin\left(x\right)$).

טענה 8.65 לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$.e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

הוכחה: ראינו כי תחום ההתכנסות של הטור הנ"ל הוא כל הציר הממשי ולכן צמד האגפים מוגדרים היטב וסופיים לכל $x\in\mathbb{R}$. יהי x ממשי כלשהו. נמצא את השארית מסדר n בנקודה x (נבחן את השארית בערכה המוחלט מאחר וזה מספק בכדי להוכית התכנסות ל־0).

$$\begin{aligned}\left|R_{n}\left(x\right)\right| &= \frac{\left|f^{(n+1)}\left(c\right)\right|}{(n+1)!}x^{n+1}=\\ &= \frac{e^{c}}{(n+1)!}x^{n+1}=\end{aligned}$$

כאשר $c\in[0,x]$ לפי משפט השארית של לגראנג'. נשתמש בחסם שאנו מכירים מתרגילים קודמים שאומר ש־ $c_{1}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}<n!$ ונקבל

$$\begin{aligned}\left|R_{n}\left(x\right)\right| &= \frac{e^{c}}{(n+1)!}x^{n+1}<\\ &< e^{c}\frac{x^{n+1}}{c_{1}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}=\\ &= \frac{e^{c}}{c_{1}}\cdot\frac{x^{n+1}e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

לכן אם נראה ש־

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{ex}{n+1}\right)^{n+1}=0$$

ינבע ש־ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=\lim_{N\to\infty}T_{N}\left(x\right)=f\left(x\right)$. נשים לב ש־ ex זה מספר קבוע כלשהו ולכן עבור n מספיק גדול נקבל ש־ $\frac{ex}{n+1}<1$ ולכן עבור כל n שכזה והלאה נקבל ש־

$$,\left(\frac{ex}{n+1}\right)^{n+1}<q^{n+1}$$

כאשר $0 < q < 1$. לסיכום, כאשר ניקח את הגבול ש־ $N \to \infty$ נקבל ש־

$$\lim_{N\to\infty} \frac{e^c}{c_1} \cdot \left(\frac{ex}{n+1}\right)^{n+1} \quad = \tfrac{e^c}{c_1} \cdot 0 \quad = 0$$

והשארית שואפת לאפס. לכן הפונקציה שווה לטור בכל נקודה. אותה הוכחה תהיה נכונה גם עבור הפונקציות $\sin(x)$ ו־ $\cos(x)$. ■

תרגיל 8.66 חשבו את $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ עם שגיאה שלא עולה על $\frac{1}{9\cdot 9!}$.

פתרון: נשתמש בפיתוח טיילור של הפונקציה.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} \left[x^{2n+1}\right]_0^1 = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}
\end{aligned}$$

קיבלנו טור לייבניץ. כעת צריך למצוא למה הוא שווה עם שגיאה של לכל היותר $\frac{1}{9\cdot 9!}$. נזכור את החסמים שקיבלנו עבור טורי לייבניץ, וניקח את הזנב של הטור הנתון מ־ $n=3$. הטור הוא ־

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \frac{1}{9\cdot 9!} - \cdots$$

והזנב מהאיבר השלישי נתון על ידי

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} = \frac{1}{9\cdot 9!} - \frac{1}{11\cdot 11!} + \frac{1}{13\cdot 13!} - \cdots.$$

מאחר והזנב עצמו הוא טור לייבניץ הוא חסום על ידי האיבר הראשון שלו מלמעלה ועל ידי הערך 0 מלמטה ולכן

$$0 < \quad \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \quad < \frac{1}{9\cdot 9!}.$$

זאת אומרת ש־

$$0 < \quad \left|\textstyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx - 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!}\right| = \textstyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \quad < \frac{1}{9\cdot 9!},$$

כמו שנדרש.

תרגיל 8.67 מצאו את הטור טיילור של $\arctan(x)$ סביב הנקודה $x_0=0$.

פתרון: בכדי למצוא את הטור טיילור הנ"ל, נשתמש בטור הגיאומטרי. עבור כל $x\in(-1,1)$ ידוע ש־

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n},$$

לכן

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-t^{2}\right)^{n}= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה על צמד האגפים בין 0 ל־ x ונקבל

$$\begin{aligned}\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{2}}dt &= \int_{0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}dt \\ T_{\arctan(x)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}\end{aligned}$$

טענה 8.68 לכל $x\in\mathbb{R}$,

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

הוכחה: מספיק להוכיח כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{N\to\infty}|R_N(x)|=0$. ממשפט השארית קיימת נקודה c בין x ל־0 כך ש־

$$R_N(x)\underset{x_0=0}{=}\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1},$$

כמובן כאשר הפיתוח הוא סביב $x_0=0$. מאחר ו־ $\left|f^{(N+1)}(c)\right|\leq 1$ נובע כי

$$\begin{aligned}|R_N(x)| &= \left|\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}\right|\leq \\ &\leq \left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right|= \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left|R_N(x)\right| &\leq \lim_{N\to\infty}\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}= \\ &\underset{M=N+1}{=} \lim_{M\to\infty}\frac{|x|^{M}}{M!}\end{aligned}$$

נוכיח כעת כי הגבול האחרון שואף ל־0. נסתכל על הטור $\sum_{M=1}^{\infty}\frac{x^M}{M!}$ ונוכיח כי הוא מתכנס לכל x ולכן נובע ש־ $\lim_{M\to\infty}\frac{|x|^M}{M!}=0$ כנדרש. נשתמש בנוסחת המנה,

$$\begin{aligned}L &= \lim_{M\to\infty}\frac{a_{M+1}}{a_M}= \\ &= \lim_{M\to\infty}\frac{x^{M+1}/(M+1)!}{x^M/M!}= \\ &= \lim_{M\to\infty}\frac{x^{M+1}\cdot M!}{x^M\cdot(M+1)!}= \\ &= \lim_{M\to\infty}\frac{x}{(M+1)}=0\end{aligned}$$

על כן נובע ש־ $R=\infty$ (רדיוס ההתכנסות) וטענת העזר והטענה הכללית נובעות. ■

תרגיל 8.69 פתחו את הפונקציות הבאות לטורי מקלורן ומצאו את רדיוס ההתכנסות שלהם.

1. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/3}$.
2. $f(x)=\frac{2x}{-2x^2+x+1}$.

פתרון: נשתמש בטור של $\ln(x+1)$ בכדי למצוא ייצוג של הפונקציה $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/3}$.

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/3} &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\right] = \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^n}{n}\right] = \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right] = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ is odd}}}\frac{2x^n}{n} = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}
\end{aligned}
$$

ותחום ההתכנסות הוא $x \in (-1,1)$.

עבור הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{-2x^2+x+1}$ נפרק את השבר לשני שברים שונים.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x}{-2x^2+x+1} = \\
&= \frac{x}{-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{x}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

נפצל את הביטוי שקיבלנו ל־2 שברים.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{Ax + A\frac{1}{2} + B - Bx}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \\
&= \frac{(A-B)x + A\frac{1}{2} + B}{(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

נבצע השוואת מקדמים ונקבל

$$\begin{aligned}\Rightarrow A-B &= 1\\ \frac{A}{2}+B &= 0\\ \Rightarrow A &= \frac{2}{3}\\ .B &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=\\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+2x}=\\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(1-(-2)^n\right)\end{aligned}$$

ורדיוס ההתכנסות הוא $R=\frac{1}{2}$, ז"א התכנסות אם ורק אם $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

תרגיל 8.70 מצאו נגזרת מסדר k של $\sin^2(x)$ בנקודה $x_0=0$.

פתרון: נשתמש בנגזרת של הפונקציה בכדי למצוא את הטור טיילור שלה.

$$\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$$

על כן,

$$\begin{aligned}\left(\sin^2(x)\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}\\ \sin^2(x) &= \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1}\,dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+2)}x^{2n+2}=\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}=\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

נחלק למצבים על פי הזוגיות של k וכאשר $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \begin{cases} a_k \cdot k! & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot 2n! & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^{n+1} 2^{2n-1} & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & k = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}+1} 2^{k-1} & k\ is\ even \\ 0 & k\ is\ odd\ or\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

תרגיל 8.71 הציגו את $\int_0^1 e^{x^2} dx$ כטור בעזרת פיתוח הפונקציה לטור מקלורן.

פתרון: נשתמש בטור טיילור של e^{x^2} סביב $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ e^{x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

נשתמש באינטגרציה על שני האגפים.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} dx \\ \int_0^1 e^{x^2} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)} \right]_0^1 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n!)} \end{aligned}$$

תרגיל 8.72 מצאו את טור טיילור של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

סביב הנקודה $x_0 = 0$ וקבעו מתי הפונקציה שווה לטור.

פתרון: נצטרך תחילה לבדוק שהפונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h-0)-f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}}{h} = \\ &\overset{x=\frac{1}{|h|}}{=} \lim_{x\to\infty} e^{-x^2}x = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} \\ &\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

ולכן הנגזרת הראשונה מתאפסת בנקודה הזאת. נוכיח באינדוקציה שכל הנגזרות בנקודה $x_0 = 0$ מתאפסות. נשים לב שהנגזרת הראשונה של הפונקציה היא

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ P_1(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

כאשר $P\left(\frac{1}{x}\right)$ זה פולינום ב־ $\frac{1}{x}$. באופן כללי נוכל לגזור את הפונקציה בכל נקודה שונה מאפס ולכן היא תהיה פולינום כפול הפונקציה המקורית. נניח באינדוקציה כי

$$.f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

ונמצא את הנגזרת הבאה בנקודה $x_0 = 0$. בלי הגבלת הכלליות, ניקח את הגבול החד־צדדי כאשר $h \to 0^+$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f^{(n)}(h-0)-f^{(n)}(0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{P_n(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} P_{n+1}(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h^2}} \\ &\overset{x=\frac{1}{h}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{P_{n+1}(x)}{e^{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

כי לכל פולינום נוכל להשתמש שוב ושוב בכלל לופיטל עד שיוותר רק הפונקציה המעריכית במכנה. לכן קיבלנו ש־

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T_{f(x)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = 0$$

אבל הפונקציה שווה ל־0 רק בנקודה $x = 0$ ולכן הטור והפונקציה שווים זה לזה רק בנקודה אחת.

תרגיל 8.73 הוכיחו בעזרת טורי טיילור כי

1. $\sin(x)$ היא פונקציה אי־זוגית ו־$\cos(x)$ היא פונקציה זוגית.

(א) $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$.

(ב) $0<\sin(x),\cos(x)<1$ לכל $x\in(0,1)$.

פתרון: נרשום את טורי טיילור הרלוונטיים לשאלה הנתונה.

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \forall x\in\mathbb{R},\\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \forall x\in\mathbb{R},\\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n} \quad \forall x\in\mathbb{R},\\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

1. ההוכחה היא ישירה מהחזקות בטורים. לכל $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-x)^{2n+1}=\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=-\sin(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(-x)^{2n}=\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x)^{2n}=\cos(x).\end{aligned}$$

2. נחבר את צמד הטורים הרלוונטיים ונקבל את התוצאה הרצויה.

$$\begin{aligned}\sin^2(x)+\cos^2(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}(2x)^{2n}+1= \\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{n+1}+(-1)^{n}\right)}{(2n)!}(2x)^{2n}= \\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0}{(2n)!}\cdot(2x)^{2n}=1.\end{aligned}$$

3. נשים לב שהטורים של $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$ הם טורי לייבניץ בכל $x\in(0,1)$ מאחר ו־ $\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n\geq1}, \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geq1}$ הן סדרות מונוטוניות יורדות ב־n כאשר x קבוע. על כן, לפי החסמים שמצאנו לטורי לייבניץ נקבל ש־

$$\begin{aligned}1>x=a_1>\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}>0 \\ .1=a_1>\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}>0\end{aligned}$$

9 פונקציות מרובות משתנים

עד כה עסקנו וראינו רק פונקציות במשתנה בודד. זאת אומרת, כל הפונקציות היו מהצורה $f(x)$ כאשר הקלט הוא מספר והפלט הוא מספר. זה, כמובן, אינו המצב הכללי ביותר. באופן כללי, אנחנו יודעים שישנן פונקציות במרחב ובמישור ולא רק במימד אחד. נרחיב כעת את הדיון לפונקציות במספר מימדים. אנו נתחיל בניתוח פונקציות מהמישור ל-$\mathbb{R}$. קרי, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

לשם כך נתחיל בהבנה של מערכות צירים ומספר הגדרות. אנו דנים במרחב תלת מימדי ולכן המרחקים יהיו ב-$\mathbb{R}^3$.

הגדרה 9.1 (נורמה) הנורמה של נקודה $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ היא

$$\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2-z^2}.$$

הנורמה של נקודה למעשה נותנת לנו את המרחק שלה מהראשית. נשתמש בנורמה בכדי להגדיר מרחקים במרחב.

הגדרה 9.2 (מרחק בין נקודות) המרחק בין 2 נקודות $(x_i,y_i,z_i)\in\mathbb{R}^3,\ i=1,2$ הוא

$$\|(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)\|=\|(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)\|.$$

נשים לב שהמרחק בין 2 נקודות הוא למעשה הנורמה של הוקטור שמהווה חיסור של צמד הנקודות. קל לבדוק שהאופן בו מחסרים בין הנקודות הוא חסר משמעות מאחר והמרחק לפי הגדרתו לא משתנה.

הגדרה 9.3 (פונקציה בשני משתנים) פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ בשני משתנים עם תחום הגדרה $D\subseteq\mathbb{R}^2$ זו התאמה שמעבירה כל נקודה $(x,y)\in D$ לנקודה יחידה $f(x,y)=z\in\mathbb{R}$.

תחום ההגדרה הטבעי של פונקציה מרובת משתנים, בדומה לתחום ההגדרה הטבעי של פונקציה חד מימדית, זה התחום המקסימאלי עליו ניתן להגדיר את הפונקציה $f(x,y)$.

9.1 גבולות ורציפות של פונקציות מרובות משתנים

הגדרה 9.4 (גבול של פונקציה מרובת משתנים) תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0), פרט אולי בנקודה עצמה. נאמר שלפונקציה קיים גבול L בנקודה (x_0,y_0),

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L,$$

אם לכל $\epsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל (x,y) שעבורם $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ מתקיים

$$\|f(x,y)-L\|<\epsilon.$$

בנוסף, נאמר שהפונקציה רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם $L=f(x_0,y_0)$.

נשים לב שהמשמעות של רציפות לא משתנה כאשר עולים במספר המימדים. אם לפונקציה קיימת גבול L בנקודה כלשהי, אזי לא משנה כיצד נתקרב לנקודה הזאת (באיזה אופן וכיוון נגוע לכיוון הנקודה), הערכים של הפונקציה יילכו ויתקרבו ל־L. לעומת זאת, ישנם דברים שמשתנים ביחס למקרה החד־מימדי. כאשר דנו בפונקציות בעבר יכולנו לדבר על גבולות חד־צדדיים. זאת אומרת, גבולות של הפונקציה כאשר שואפים מימין או משמאל לנקודה. בזמנו אמרנו שהגבול קיים אם שני הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים זה לזה.

במקרה הנוכחי ישנם הרבה יותר כיוונים. ניתן להתקרב לנקודה במישור בכל צורה אפשרית על פני המישור (על קו ישר, מתעגל וכן הלאה). לכן אופן השאיפה לנקודה הוא משמעותי.

הערה 9.5 אם נמצא שני כיוונים בהם שואפים לנקודה כלשהי ומקבלים שהגבולות שונים, אז נוכל להסיק כי לפונקציה לא קיים גבול בנקודה.

מאחר ואין באפשרותנו לבדוק כל כיוון אפשרי להתקדם לעבור הנקודה (x_0, y_0), ישנה דרך יחסית פשוטה לבדוק רציפות וזאת על ידי פרמטריזציה. כל נקודה (x, y) במישור ניתן להציג על ידי זווית ומרחק מראשית הצירים באופן הבא:

$$x = r\cos(\theta),$$
$$y = r\sin(\theta),$$

כאשר $r \geq 0$. לכן, בכל עת נוכל לרשום $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. זאת תכונה מאוד שימושית מאחר ו־ $(x, y) \to (0, 0)$ אם ורק אם $r \to 0$ ולכן נוכל תמיד להעביר את המקרה הנ"ל למצב חד מימדי. יחד עם זאת, נוכל תמיד להציג את אופן ההתכנסות לנקודה כלשהי על ידי ייצוג y כפונקציה של x ($y = y(x)$ ולכן $(x, y) = (x, y(x))$).

הגדרה 9.6 תהי פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$. קו גובה C מוגדר להיות הקבוצה

$$\{(x, y) : \ f(x, y) = C\}.$$

זאת אומרת, אוסף הנקודות עליהם מקבלת הפונקציה את הערך C.

תרגיל 9.7 מצאו את קווי הגובה של הפונקציה $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

פתרון: נשים לב שהערכים היחידים שהפונקציה מקבלת הם אי־חיוביים, $f(x, y) \leq 0$ לכל $x, y \in \mathbb{R}^2$. יהי $k \geq 0$.

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 = -k$$
$$x^2 + y^2 = k$$
$$\|(x, y)\| = \sqrt{k}$$

לכן לכל $k \geq 0$ קו הגובה $(-k)$ זה הקבוצה $\left\{(x, y) : = \|(x, y)\| = \sqrt{k}\right\}$ וזה למעשה מעגל עם רדיוס $-k$.

תרגיל 9.8 מצאו את הגבול של הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

בנקודה $(x_0, y_0) = (0, 0)$ לאורך:

1. ציר x.
2. העקומה $y(x)=x^2$.
3. העקומה $y(x)=x$.

פתרון:

1. נחשב את הגבול לאורך ציר x, זאת אומרת כאשר $y=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0}= \\ &= \lim_{x\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

2. נחשב את הגבול לאורך העקומה $y(x)=x^2$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y(x)) &= \lim_{x\to 0} f\left(x,x^2\right)= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0\end{aligned}$$

3. נחשב את הגבול לאורך העקומה $y(x)=x$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x,x)= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

לכן נוכל להסיק שלפונקציה אין גבול בנקודה $(0,0)$ וזאת מאחר ויש לפחות 2 כיוונים בהם הגבולות יוצאים שונים.

תרגיל 9.9 מצאו את הגבול של הפונקציה

$$f(x,y)=x\ln(|x|+|y|)$$

בנקודה $(x_0,y_0)=(0,0)$.

פתרון: בכדי למצוא את הגבול נשתמש בפרמטריזציה $(x,y)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$ ולכן הגבול $(x,y)\to(0,0)$ יהפוך ל- $r\to 0^+$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(|x|+|y|)= \\ &= \cos(\theta)\lim_{r\to 0^+} r\ln(|r\cos(\theta)|+|r\sin(\theta)|)= \\ &= \cos(\theta)\lim_{r\to 0^+} r\ln(r(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|))= \\ &= \cos(\theta)\lim_{r\to 0}\left[r\ln(r)+r\ln(|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|)\right]\end{aligned}$$

האיבר השני בסוגריים שואף לאפס, נשאר רק להראות שהאיבר הראשון שואף לאפס.

$$\begin{aligned}\lim_{r\to0^+} r\ln(r) &= \lim_{r\to0^+}\frac{\ln(r)}{\frac{1}{r}} = \\ &\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{r\to0^+}\frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = \\ &= \lim_{r\to0^+} -r = 0\end{aligned}$$

לכן הפונקציה שואפת ל־0 כאשר $(x,y)\to(0,0)$.

תרגיל 9.10 האם קיים קבוע c כך שהפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}x\ln\left(x^2+y^2\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ c & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה?

פתרון: בכדי לענות על שאלה זו נצטרך תחילה למצוא את הגבול של הפונקציה ב־0 ולאחר מכן נקבע את c. נשתמש בפרמטריזציה $(x,y)=(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln\left(x^2+y^2\right) = \\ &= \lim_{r\to0^+} r\cos(\theta)\ln\left((r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2\right) = \\ &= \cos(\theta)\lim_{r\to0^+} r\ln\left(r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)\right) = \\ &= \cos(\theta)\lim_{r\to0^+} r\ln\left(r^2\right) = \\ &= 2\cos(\theta)\lim_{r\to0^+} r\ln(r) = 0\end{aligned}$$

ולכן עבור $c=0$ נקבל שהפונקציה היא רציפה.

9.2 נגזרות של פונקציות מרובות משתנים

הגדרה 9.11 (נגזרת של פונקציה מרובת משתנים) תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ המוגדרת בסביבה של הנקודה (x_0,y_0), פרט אולי בנקודה עצמה.

- נאמר שהפונקציה גזירה לפי x בנקודה (x_0,y_0) אם הגבול הבא קיים

$$\begin{aligned}f_x(x_0,y_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.\end{aligned}$$

- נאמר שהפונקציה גזירה לפי y בנקודה (x_0, y_0) אם הגבול הבא קיים

$$f_y\left(x_0, y_0\right) = \lim_{y \to y_0} \frac{f\left(x_0, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{x - x_0} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0 + h\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}.$$

הנגזרות של הפונקציה לפי x ולפי y נקראות גם הנגזרות החלקיות לפי x ולפי y.

הערה 9.12 כל כללי האריתמטיקה והמשפטים שראינו למקרה החד־מימדי (יחידות הגבול, אריתמטיקה של גבולות, אריתמטיקה של פונקציות רציפות וגזירות) תקפים גם למקרה בו הפונקציות הן מרובות משתנים.

תרגיל 9.13 תהיי פונקציה $f\left(x, y\right) = \sqrt{|xy|}$.

1. מצאו את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה.
2. קבעו האם הפונקציה רציפה בתחום ההגדרה הטבעי שלה.
3. מצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
4. מצאו עקומה שהנגזרת לאורכה שונה מהנגזרות החלקיות שמצאתם בסעיף הקודם.

פתרון:

1. תחום ההגדרה הטבעי זה התחום המקסימאלי עליו ניתן להגדיר את הפונקציה $f\left(x, y\right)$. הפונקציה מוגדרת כל עוד הביטוי שבתוך השורש הוא לא שלילי ולכן תחום ההגדרה הטבעי יהיה

$$D = \left\{(x, y) : \ |xy| \geq 0\right\} = \mathbb{R}^2,$$

כל הנקודות במישור.

2. הפונקציה היא פונקציה רציפה בכל תחום ההגדרה שלה וזאת בגלל שהפונקציות $g\left(x, y\right) = \sqrt{|x|}$ ו־$h\left(x, y\right) = \sqrt{|y|}$ הן פונקציות רציפות ולכן לפי אריתמטיקה של פונקציות רציפות, גם המכפלה שלהן רציפה.

3. נחשב את הנגזרות החלקיות לפי הגדרה.

$$f_x\left(0, 0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(0 + h, 0\right) - f\left(0, 0\right)}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

ובאופן דומה נקבל ש־

$$f_y\left(0, 0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(0, 0 + h\right) - f\left(0, 0\right)}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

לכן הנגזרות של הפונקציה ב־x, y הן 0 בנקודה $(0, 0)$.

4. נבדוק מה קורה כאשר מחשבים את הנגזרת לאורך העקומה $y(x) = x$. נזכיר כי לפי ההגדרה, הנגזרת בכיוון $\overrightarrow{V}$ מוגדרת להיות

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left((x_0,y_0)+h\cdot\overrightarrow{V}\right)-f(x_0,y_0)}{h},$$

כאשר $\overrightarrow{V}$ זה וקטור / נקודה במרחק 1 מהראשית. אם אנו מעוניינים לקחת נקודה כזאת צריך למצוא נקודה במרחק 1 מהראשית מהצורה $(x,y(x)) = (x,x)$. בכדי שהמרחק יהיה 1 נדרוש ש־ $x^2+x^2=1$ ולכן נקבל ש־ $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. זאת אומרת, נמצא את הנגזרת בכיוון $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f\left((0,0)+h\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\left|\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2\right|}-\sqrt{|0|}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{2}}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

וקיבלנו שהנגזרת לאורך עקומה זאת שונה מהנגזרת בסעיף הקודם.

תרגיל 9.14 הראו כי הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

היא פונקציה רציפה בכל תחום ההגדרה הטבעי שלה.

פתרון: נשים לב תחילה כי תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה הוא כל המישור. בנוסף, בכל נקודה $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ הפונקציה היא מכפלה, חילוק וחיבור של פונקציות רציפות כאשר המכנה שונה מ־0 ולכן גם הפונקציה עצמה רציפה ומוגדרת היטב. נותר לבדוק מה קורה כאשר $(x_0,y_0)=(0,0)$. נוכיח כי הגבול של הפונקציה הוא $L=0$. נשים לב לפיתוח האלגברי הבא. לכל $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left(x^2-y\right)^2 &\geq 0\\ x^4-2x^2y+y^2 &\geq 0\\ x^4+y^2 &\geq 2x^2y\\ \frac{1}{2} &\geq \frac{x^2y}{x^4+y^2}.\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right| = \\ &= \left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right| |y| \leq \\ &= \frac{1}{2}|y|.\end{aligned}$$

כאשר $(x,y)\to(0,0)$ נובע בפרט ש־ $y\to 0$ ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)| &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}|y| = \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}|y| = 0\end{aligned}$$

וקיבלנו שהפונקציה רציפה ב־0 גם כן.

9.2.1 נגזרות מסדרים גבוהים של פונקציות מרובות משתנים

לא תמיד נצטרך להשתמש בהגדרה לנגזרת כאשר נתונה לנו פונקציה מרובת משתנים. לעיתים קרובות נוכל לגזור בצורה פשוטה בדיוק כמו שעשינו במקרה החד־מימדי. כיצד עושים זאת? כאשר מעוניינים לחשב את הנגזרת בכיוון X לפונקציה $f(x,y)$ מתייחסים ל־y כקבוע וגוזרים את הפונקציה כאילו הייתה רק פונקציה של x. באופן דומה נוכל למצוא את הנגזרת בכיוון y.

לאחר שגוזרים את הפונקציה פעם אחת בכיוון כלשהו מקבלים פונקציה חדשה בשני משתנים. גם אותה נוכל לגזור ולקבל נגזרת נוספת, לדוגמא: $f_{xx}(x,y)$ תהיה הנגזרת בכיוון x של הנגזרת בכיוון x של הפונקציה $f(x,y)$. דוגמא נוספת: $f_{yx}(x,y)$ תהיה הנגזרת כיוון x של הנגזרת בכיוון y של הפונקציה $f(x,y)$.

משפט 9.15 תהי פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$. נניח כי $f_{xy}(x,y)$ ו־$f_{yx}(x,y)$ קיימות ורציפות בנקודה (x_0,y_0). אזי

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

תרגיל 9.16 תהי פונקציה $f(x,y)=\sqrt{x}\cos\left(xy^2\right)$. מצאו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני (כולל).

פתרון: נגזור את הפונקציה על פי כללי הגזירה שאנו מכירים.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{x}\cos\left(xy^2\right)\\
f_x(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(xy^2\right)-\sqrt{x}y^2\sin\left(xy^2\right)\\
f_y(x,y) &= -\sqrt{x}\sin\left(xy^2\right)2xy=-2x^{\frac{3}{2}}y\sin\left(xy^2\right)\\
f_{xx}(x,y) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\cos\left(xy^2\right)-\frac{y^2}{2\sqrt{x}}\sin\left(xy^2\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}y^2\sin\left(xy^2\right)-\sqrt{x}y^4\cos\left(xy^2\right)\\
f_{yx}(x,y) &= -3x^{\frac{1}{2}}y\sin\left(xy^2\right)-2x^{\frac{3}{2}}y^3\cos\left(xy^2\right)\\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(xy^2\right)2xy-2\sqrt{x}y\sin\left(xy^2\right)-\sqrt{x}y^2\cos\left(xy^2\right)2xy=\\
&= -\sqrt{x}y\sin\left(xy^2\right)-2\sqrt{x}y\sin\left(xy^2\right)-2x^{\frac{3}{2}}y^3\cos\left(xy^2\right)\\
f_{yy}(x,y) &= -2x^{\frac{3}{2}}\sin\left(xy^2\right)-4x^{\frac{5}{2}}y^2\cos\left(xy^2\right)
\end{aligned}$$

תרגיל 9.17 תהי פונקציה

$$.f(x,y)=\begin{cases}0 & x,y\leq 0\\ 1 & x,y>0\end{cases}$$

מצאו את הנגזרות החלקיות ב־$(0,0)$ וקבעו אם הפונקציה רציפה בנקודה זו.

פתרון: נשתמש בהגדרת הנגזרת בכדי לענות על השאלה.

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.
\end{aligned}$$

ובאופן דומה נקבל ש־

$$\begin{aligned}
f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.
\end{aligned}$$

לכן הנגזרות החלקיות של הפונקציה ב־x,y הן 0 בנקודה $(0,0)$. מצד שני נמצא את הגבול של הפונקציה בנקודה זו. כאשר נעים לאורך העקומה $y(x)=x$ מהרביע החיובי במישור נקבל ש־

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y(x))\to(0,0)}f(x,y) &= \lim_{(x,x)\to(0,0)}f(x,x)=\\
&= \lim_{x\to 0^+}f(x,x)=\\
&= \lim_{x\to 0^+}1=1.
\end{aligned}$$

לעומת זאת, אם נחשב את הגבול מהכיוון של הרביע בו $x, y < 0$ נקבל שהגבול הוא 0 כמו שהחישוב הבא מציג,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y(x))\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \\ &= \lim_{x\to 0^-} f(x,x) = \\ &= \lim_{x\to 0^+} 0 = 0.\end{aligned}$$

לכן אין גבול בנקודה ובפרט הפונקציה לא רציפה בנקודה זו.

הערה 9.18 שימו לב שבניגוד למקרה החד־מימדי, העובדה שיש נגזרות חלקיות לפונקציה בנקודה לא אומר שהפונקציה רציפה בה, כמו שהתרגיל האחרון מדגים. זאת אומרת, קיום נגזרות חלקיות בנקודה מסויימת לא מבטיח שהפונקציה רציפה בנקודה, בשונה ממה שראינו במקרה החד־מימדי.

9.2.2 מכפלה סקלארית של וקטורים

הגדרה 9.19 (מכפלה סקלארית) יהיו 2 וקטורים $\overrightarrow{u} = (c,d)\,,\ \overrightarrow{v} = (a,b)$. המכפלה הסקלארית של $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ היא

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = ac + bd.$$

טענה 9.20 יהיו 2 וקטורים $\overrightarrow{u} = (c,d)\,,\ \overrightarrow{v} = (a,b)$ עם זווית θ בינהם. המכפלה הסקלארית של $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ שווה ל־

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\|\cdot\|\overrightarrow{u}\|\cdot\cos(\theta).$$

הערה 9.21 קודם לכן ראינו את ההגדרה לנגזרת של הפונקציה f בכיוון $\overrightarrow{V}$ בנקודה (x_0, y_0) כ־ $\lim_{h\to 0}\frac{f\left((x_0,y_0)+h\cdot\overrightarrow{V}\right)-f(x_0,y_0)}{h}$ כאשר $\overrightarrow{V}$ זה וקטור / נקודה במרחק 1 מהראשית. מבחינת סימונים, נסמן נגזרת זאת ב־

$$D_{\overrightarrow{v}}(f)(x_0, y_0).$$

משפט 9.22 תהי פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$. נניח כי $f_y(x,y)$ ו־$f_x(x,y)$ קיימות ורציפות בנקודה (x_0, y_0). אזי

$$D_{\overrightarrow{v}}(f)(x_0,y_0) = a\cdot f_x(x_0,y_0) + b\cdot f_y(x_0,y_0),$$

כאשר $\overrightarrow{v} = (a,b)$.

נגדיר כעת אובייקט מתמטי חדש־ גרדיאנט של פונקציה. הגרדיאנט של פונקציה f הוא

$$.\nabla f\left(x,y\right)=\left(f_x\left(x,y\right),f_y\left(x,y\right)\right)$$

על כן, תחת הסימונים הנ"ל ומשפט (9.22) נקבל ש־

$$.D_{\overrightarrow{v}}\left(f\right)\left(x_0,y_0\right)=\nabla f\left(x_0,y_0\right)\cdot\overrightarrow{v}=$$

מסקנה 9.23 אם הזווית בין הווקטורים $\|\overrightarrow{\nabla f}\|,\|\overrightarrow{v}\|$ היא θ אזי

$$.D\overrightarrow{v}\left(f\right)=\|\overrightarrow{v}\|\cdot\|\overrightarrow{\nabla f}\|\cdot\cos\left(\theta\right)$$

הערה 9.24 נקודה חשובה נוספת עבור הגרדיאנט בנקודה היא שהגרדיאנט בנקודה תמיד ניצב לקו הגובה באותה הנקודה.

תרגיל 9.25 נתונה פונקציה f עם נגזרות חלקיות רציפות. כמו כן, נתון ש ־

- הנגזרת של f בנקודה $A=(1,3)$ בכיוון מ־A ל־ $B=(3,3)$ היא 3.
- הנגזרת של f בנקודה $A=(1,3)$ בכיוון מ־A ל־ $C=(1,7)$ היא 26.

מצאו את הנגזרת של הפונקציה בנקודה A בכיוון מ־A ל־ $E=(6,15)$.

פתרון: נתחיל בארגון והשלמת נתונים. הנתון הראשון על הנגזרת של הפונקציה בכיוון מ־A ל־B הוא מעט מטעה, למה? בגלל שאם נשים לב הכיוון של וקטור שיוצא מ־A ומגיע ל־B הוא

$$.B-A=(3,3)-(3,1)=(2,0)$$

ואם נסתכל רק על הכיוון וננרמל את האורך של הוקטור נקבל ש־

$$(B-A)\cdot\frac{1}{\|B-A\|}=(2,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}=(1,0)$$

וזו למעשה הנגזרת בכיוון ציר x, קרי

$$.f_x\left(1,3\right)=3$$

באופן דומה נקבל שכיוון מ־A ל־ C הוא

$$\begin{aligned}(C-A)\cdot\frac{1}{\|C-A\|}&=((1,7)-(1,3))\,\frac{1}{\|\,(1,7)-(1,3)\,\|}=\\&=(0,4)\,\frac{1}{\|\,(0,4)\,\|}=\\&=(0,4)\,\frac{1}{\sqrt{4^2}}=(0,1)\,.\end{aligned}$$

זאת אומרת,

$$.f_y\left(1,3\right)=26$$

לכן כל שנותר לנו הוא לחשב את $\overrightarrow{v}=\left(E-A\right)\frac{1}{\|E-A\|}$ ולהשתמש במשפט שראינו עבור הגרדיאנט.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \left(E-A\right)\frac{1}{\|E-A\|}= \\ &= \left(\left(6,15\right)-\left(1,3\right)\right)\frac{1}{\|\left(6,15\right)-\left(1,3\right)\|}= \\ &= \left(5,12\right)\frac{1}{\|\left(5,12\right)\|}= \\ &= \left(5,12\right)\frac{1}{\sqrt{25+144}}=\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right).\end{aligned}$$

לפי המשפט האחרון, נקבל ש־

$$\begin{aligned}.D_{\overrightarrow{v}}\left(f\right)\left(1,3\right) &= \nabla f\left(1,3\right)\cdot\overrightarrow{v}= \\ &= \left(f_x\left(1,3\right),f_y\left(1,3\right)\right)\cdot\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)= \\ &= \left(3,26\right)\cdot\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)= \\ &= \frac{15}{13}+24=25\frac{2}{13}.\end{aligned}$$

תרגיל 9.26 נסתכל על חציה העליון של ספירה $x^2+y^2+z^2=1$ כלומר על הפונקציה

$$.z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

מצאו את הנגזרות הכיווניות בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ובכיוון של נקודה זו.

פתרון: נמצא תחילה את הגרדיאנט של הפונקציה באופן כללי ובנקודה הרלוונטית.

$$\begin{aligned}\nabla f\left(x,y\right) &= \left(f_x\left(x,y\right),f_y\left(x,y\right)\right)= \\ &= \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \\ \nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}},\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}}\right)= \\ &= \left(-1,-1\right).\end{aligned}$$

נמצא את הכיוון $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\|\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\|}=\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\|\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\|}= \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}}= \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

לכן הנגזרת שמבוקשת היא

$$\begin{aligned}D_{\overrightarrow{v}}(f)\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\overrightarrow{v}= \\ &= (-1,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

תרגיל 9.27 מצאו את הכיוון בו השינוי של $f(x,y)=x^2y^3$ הוא הגדול ביותר בנקודה $(1,-1)$.

פתרון: נתחיל במציאת הגרדיאנט בנקודה.

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= (f_x(x,y),f_y(x,y))= \\ &= \left(2xy^3,3x^2y^2\right) \\ \nabla f(1,-1) &= (-2,3).\end{aligned}$$

כעת יש לנו את הגרדיאנט. מה זה הכיוון בו השינוי הוא הגדול ביותר, זה $\overrightarrow{v}$ כך שהנגזרת בכיוון $\overrightarrow{v}$ היא מקסימאלית. לכן ננסח מחדש את השאלה ־ אנו צריכים למצוא את הוקטור $\overrightarrow{v}$ כך שהנגזרת בכיוונו היא הגדול ביותר. מה זאת הנגזרת בכיוון $\overrightarrow{v}$ בנקודה $(1,-1)$? נשתמש במכפלה הסקלארית שראינו קודם לכן ונקבל,

$$\begin{aligned}D_{\overrightarrow{v}}(f)(1,-1) &= \nabla f(1,-1)\cdot\overrightarrow{v}= \\ &= \|\nabla f(1,-1)\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\cos(\theta)= \\ &= \|(-2,3)\|\cdot 1\cdot\cos(\theta)\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון הוא בגלל ש־$\overrightarrow{v}$ הוא וקטור באורך 1 ולפי הגרדיאנט שמצאנו. כעת אנו יודעים שהדבר היחיד שמשפיע על גדול הנגזרת זו הזווית ואנו יודעים גם ש־$\cos(\theta)\leq 1$ והוא שווה ל־1 כאשר $\theta=0$ לכן נדרוש שזווית זו תהיה אפס. זאת אומרת, קיבלנו שהגרדיאנט מקסימאלי כאשר הזווית בין $\overrightarrow{v}$ ו־ $\nabla f(1,-1)=(-2,3)$ היא אפס.

משמע, $\vec{v}$ שממקסם את הנגזרת הכיוונית הוא וקטור בכיוון $(-2,3)$ ובפרט שווה ל־

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-2,3)\frac{1}{\|(-2,3)\|} = \\ &= (-2,3)\frac{1}{\sqrt{4+9}} = \\ &= \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).\end{aligned}$$

9.2.3 כלל השרשרת

משפט 9.28 תהיינה $h_1(x), h_2(x)$ שתי פונקציות גזירות ברציפות. נניח כי ישנה פונקציה $f: D \to \mathbb{R}$ כך ש־ $f_y(x,y)$ ו־$f_x(x,y)$ קיימות ורציפות. נגדיר

$$g(x) = f(h_1(x), h_2(x)).$$

אזי,

$$\begin{aligned}g'(x) &= f_x(h_1(x), h_2(x)) \cdot h_1'(x) + f_y(h_1(x), h_2(x)) \cdot h_2'(x) = \\ &= \nabla f(h_1(x), h_2(x)) \cdot (h_1'(x), h_2'(x)).\end{aligned}$$

9.3 נקודות קיצון מקומיות וכלליות

בדומה לפונקציה מימד אחד, גם פונקציות מרובות משתנים הן בעלות נקודות קיצון, נקודות מינימום ומקסימום. מציאת נקודות הקיצון דומה לטכניקה בה השתמשנו בעבר אבל כעת נאלץ לנתח מספר גדול יותר של נגזרות.

הגדרה 9.29 סביבה של הנקודה (x_0, y_0) היא עיגול פתוח (דיסק) המכיל את הנקודה הזו.

ההגזרה הזו מזכירה במעט את הסביבה במקרה החד־מימדי, שם דנו על קטעים פתוחים שמכילים את הנקודה.

הגדרה 9.30 (נקודות קיצון מקומיות):

- נקודה (x_0, y_0) תקרא מקסימום מקומי אם קיימת סביבה D שבה
$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$$

- נקודה (x_0, y_0) תקרא מינימום מקומי אם קיימת סביבה D שבה
$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$$

משפט 9.31 (משפט פרמה) תהי פונקציה f עם (x_0, y_0) נקודת קיצון מקומי. נניח כי הנגזריות החלקיות של f קיימות בנקודה. אזי,

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0).$$

הנקודות עליהן $\nabla f(x,y) = (0,0)$ נקראות נקודות סטציונריות. לכן, בכדי למצוא נקודות קיצון נצטרך תחילה למצוא את כל הנקודות הסטציונריות ולמיין אותן.

משפט 9.32 (מיון וזיהוי נקודות קיצון) תהי פונקציה f ולה נקודה סטציונרית (x_0, y_0). נניח כי הנגזרות החלקיות מסדר ראשון ומסדר שני קיימות ורציפות בנקודה (x_0, y_0). נסמן:

- $A = f_{xx}(x_0, y_0)$.
- $B = f_{xy}(x_0, y_0)$.
- $C = f_{yy}(x_0, y_0)$.
- $\Delta = A \cdot C - B^2$.

אזי:

1. אם $\Delta > 0$ ו־ $A, C > 0$ אז הנקודה היא נקודת מינימום מקומי.
2. אם $\Delta > 0$ ו־ $A, C < 0$ אז הנקודה היא נקודת מקסימום מקומי.
3. $\Delta < 0$ אז הנקודה היא נקודת אוכף.
4. $\Delta = 0$ אז לא ידוע וצריך להמשיך לחקור.

תרגיל 9.33 תהיי פונקציה $f(x,y) = x^2+2y^2-4y$ המוגדרת בתחום $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 4\right\}$. מצאו נקודת מקסימום ומינימום גלובליות בסביבה הנ"ל.

פתרון: נצטרך תחילה למצוא נקודות סטציונריות ולאחר מכן למצוא את ערכי הפונקציה בקצוות התחום.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x \\ f_y(x,y) &= 4y-4. \end{aligned}$$

נשווה לאפס ונקבל שישנה נקודה קריטית אחת ־ $x=0, y=1$, ז"א הנקודה $(0,1)$. נמצא גם את הנגזרות החלקיות מסדר שני.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 \\ f_{yx}(x,y) &= 0 \\ f_{yy}(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\Delta = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 8 > 0$$

ובנוסף, $A,C>0$ ולכן הנקודה היא נקודת מינימום מקומי. הערך של הפונקציה בנקודה הוא $f(0,1)=-2$. נמצא את ערכי הפונקציה בקצוות התחום, כאשר $x^2+y^2=4$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+2y^2-4y= \\ &= x^2+y^2+y^2-4y= \\ &= 4+y^2-4y= \\ &= (y-2)^2 \end{aligned}$$

על כן, הפונקציה אי־שלילית בקצוות התחום ומכאן נובע ש־ $(0,1)$ היא נקודת מינימום גלובלית בתחום. בנוסף, הפונקציה מקבלת ערך מקסימאלי בתחום, אבל הוא לא מתקבל בתוכו אלא בקצוות (וזאת משום שאין נקודת מקסימום מקומי בפנים של התחום). המקסימום של הפונקציה $(y-2)^2$ תחת האילוץ $x^2+y^2=4$ מתקבל כאשר $y=-2$ (מהסיבה הפשוטה שככל ש־y קטן יותר מ־0 כך הפונקציה $(y-2)^2$ גדלה) ולכן נקודת מקסימום תהיה $y=-2,x=0$.

תרגיל 9.34 יהי משטח $z=x^2+y^2-1$. מצאו את הנקודה על המשטח הקרובה ביותר לראשית הצירים, $(0,0,0)$.

פתרון: נצטרך תחילה להגדיר את פונקצית המרחק של נקודה על המשטח וראשית הצירים ואז למצוא לה מינימום. נרשום את פונקצית המרחק של נקודה על הפונקציה והראשית.

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2+y^2+z^2= \\ &= x^2+y^2+\left(x^2+y^2-1\right)^2= \\ &= x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)^2+1-2\left(x^2+y^2\right)= \\ &= x^2+y^2+x^4+y^4+2x^2y^2+1-2x^2-2y^2= \\ &= x^4+y^4+2x^2y^2-x^2-y^2+1 \end{aligned}$$

כעת נמצא את הנקודות הסטציונריות.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3+4xy^2-2x \\ f_y(x,y) &= 4y^3+4yx^2-2y. \end{aligned}$$

נשווה לאפס ונקבל שאם $x=0$ אז המשוואה הראשונה מתאפסת והמשוואה השנייה היא מהצורה

$$\begin{aligned} 4y^3-2y &= 0 \\ y\left(y^2-2\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad (x,y) &= (0,0) \\ (x,y) &= \left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

באופן דומה נקבל ש־$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$הן נקודות סטציונריות (משיקולי סימטריה). אחרת $x,y\neq 0$ ולכן

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2+4y^2-2 \\ 0 &= 4y^2+4x^2-2. \end{aligned}$$

קבוצת הנקודות שמקיימת זאת היא $\left\{(x,y):\ x^2+y^2=\frac{1}{2}\right\}$. נמצא גם את הנגזרות החלקיות מסדר שני.

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y) &= 12x^2+4y^2-2\\ f_{yx}(x,y) &= 8xy\\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2+4x^2-2.\end{aligned}$$

נשים לב כי בנקודה $(0,0)$ מתקבל

$$\Delta = f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=4>0$$

ובנוסף, $A,C<0$ ולכן הנקודה היא נקודת מקסימום מקומי. בנקודות $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ נקבל

$$\Delta = f_{xx}\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)f_{yy}\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f_{xy}^2\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

ולכן לא נוכל לקבוע. המרחק בנקודות הללו הוא

$$\begin{aligned}d &= 0^2+\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(0^2+\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1\right)^2=\\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

קבוצת הנקודות האחרונה תיתן לנו את המרחק .

$$\begin{aligned}d &= x^2+y^2+\left(x^2+y^2-1\right)^2=\\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

ולכן המינימום מתקבל בכל הנקודות x,y כך ש־$x^2+y^2=\frac{1}{2}$.

9.4 פונקציות סתומות

ישנה מחלקה שלמה של פונקציות הנקראות פונקציות סתומות. לרוב מדובר במצב הבא: ישנה $f(x,y)$ פונקציה כלשהי כך ש־ $f(x,y)=c$ כאשר c הוא קבוע כלשהו. במקרה זה, נוכל להגיד ש־$y(x)$ הוא פונקציה סתומה של x. נגדיר זאת במפורש.

הגדרה 9.35 (פונקציה סתומה) $y(x)$ היא פונקציה סתומה של x אם קיימת פונקציה $f(x,y)$ כך שלכל x מתקיים $f(x,y(x))=c$.

בעצם אפשר לחשוב על זה כמו משוואה שכוללת את x,y אבל לא ניתן לבודד את אחד המשתנים הללו. מה ניתן להגיד על פונקציות כאלה?

משפט 9.36 (נגזרות של פונקציה סתומה) תהי $f(x,y)=0$ משוואה סתומה המגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה של x. נניח כי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. אזי

$$.y'(x)=-\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}$$

הוכחה: נגדיר פונקציה חדשה - $g(x)=f(x,y(x))=c$ ונסתכל על הנגזרת שלה. לפי כלל השרשרת נובע ש־

$$g'(x)=f_x(x,y(x))\cdot 1+f_y(x,y(x))\cdot y'(x)$$

ויחד עם זאת מדובר בפונקציה קבועה ולכן $g'(x)=0$. נשווה את צמד התוצאות ונקבל

$$\begin{aligned}0&=f_x(x,y(x))\cdot 1+f_y(x,y(x))\cdot y'(x)\\y'(x)&=-\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}\end{aligned}$$

כנדרש. ■

שימו לב שקיבלנו את הנגזרת $y'(x)$ למרות שלא יכולנו לרשום מפורשות את $y(x)$. נכון לעשות דבר דומה גם לפונקציות בעלות מימדים גבוהים יותר.

משפט 9.37 (נגזרות של פונקציה סתומה מ־2 מימדים) תהי $f(x,y,z)=0$ משוואה סתומה המגדירה את $z=z(x,y)$ כפונקציה של (x,y). נניח כי $f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. אזי

$$.z'_x(x,y)=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_z(x,y)}\quad ;\quad z'_y(x,y)=-\frac{f'_y(x,y)}{f'_z(x,y)}$$

הוכחה: לצורך ההוכחה נשתמש בכלל השרשרת. נסמן $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))$. נשים לב כי $g(x,y)=0$ היא פונקציה קבועה, לכן $g'_x(x,y)=0$ ובנוסף, ע"פ כלל השרשרת נקבל ש־

$$.g'_x(x,y)=f'_x(x,y,z(x,y))\cdot 1+f'_y(x,y,z(x,y))\cdot 0+f'_z(x,y,z(x,y))\cdot z'_x(x,y)\cdot 1$$

נשווה את צמד הביטויים שקיבלנו ונקבל,

$$\begin{aligned}0&=f'_x(x,y,z(x,y))+f'_z(x,y,z(x,y))\cdot z'_x(x,y)\\z'_x(x,y)&=-\frac{f'_x(x,y,z(x,y))}{f'_z(x,y,z(x,y))}=\\&=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_z(x,y)}\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש־z הוא פונקציה של (x,y) ולכן תלות ב־z היא למעשה תלות ב־ x,y. באופן דומה נוכיח את השיוויון

$$.z'_y(x,y)=-\frac{f'_y(x,y)}{f'_z(x,y)}$$

■

תרגיל 9.38 תהיי פונקציה $e^{xy^2}=2$.

1. מצאו את הנגזרת של $y'(x)$.
2. מצאו ערך של x עבור $y(x)=2$ ואת $y'(x)$ בנקודה זו.

פתרון:

1. נמצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{xy^2}y^2 \\ f_y(x,y) &= e^{xy^2}2yx \\ y'(x) &= -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))} = \\ &= -\frac{e^{x(y(x))^2}(y(x))^2}{e^{x(y(x))^2}2y(x)x} = \\ &= -\frac{y(x)}{2x}. \end{aligned}$$

2. כל שנדרש זה לפתור את המשוואה הבאה־

$$\begin{aligned} e^{x4} &= 2 \\ 4x &= \ln(2) \\ x &= \frac{1}{4}\ln(2) \end{aligned}$$

כעת נחשב את הנגזרת בנקודה.

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{1}{4}\ln(2)\right) &= -\frac{y\left(\frac{1}{4}\ln(2)\right)}{2\frac{1}{4}\ln(2)} = \\ &= -\frac{4}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

10 מבחנים - אינפי ב'

10.1 תרגילי חזרה למבחן - מבחן לדוגמא ומבחנים ישנים

תרגיל 10.1 חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin(2t)}{t}dt}{\sin(x)}=?.$$

פתרון: נשים לב שבמונה יש לנו ביטוי כך ש- $\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\sin(2t)}{t}dt = 0$ (לפי תכונות של אינטגרל מסויים עם גבולות זהים, שראינו בכיתה) וכן במכנה יש לנו ביטוי ששואף לאפס ולכן נוכל להשתמש בכלל לופיטל.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin(2t)}{t}dt}{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\cos(x)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\cos(x)\,x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)\,x} = \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 2\end{aligned}$$

תרגיל 10.2 חשבו את האינטגרל $\int_4^\infty \frac{dx}{x^2-8x+17}$.

פתרון: במכנה של הפונקציה עליה מבצעים אינטגרציה ישנו פולינום אי־פריק ולכן נבצע החלפת משתנים $x=\frac{t+8}{2}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int_4^\infty \frac{dx}{x^2-8x+17} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t+8}{2}\right)^2-8\left(\frac{t+8}{2}\right)+17} = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{4dt}{(t^2+16t+64)-16(t+8)+68} = \\ &= 2\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+16t+64-16t-128+68} = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \\ &\overset{y=\frac{t}{2}}{=} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1} = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(b)-\arctan(0)\right] = \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

תרגיל 10.3 האם האינטגרל $\int_4^\infty \frac{dx}{x^{1.1}+18x-17}$ מתכנס?

פתרון: נשים לב שאם $x > 4$ אז בפרט מתקיימים האי־שוויונות הבאים:

$$\begin{aligned}
x &> \frac{17}{18}\\
18x-17 &> 0\\
x^{1.1}+18x-17 &> x^{1.1}\\
\frac{1}{x^{1.1}} &> \frac{1}{x^{1.1}+18x-17}\\
\int_4^\infty \frac{1}{x^{1.1}}dx &> \int_4^\infty \frac{1}{x^{1.1}+18x-17}dx
\end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל השמאלי מפורשות.

$$\begin{aligned}
\int_4^\infty \frac{1}{x^{1.1}}dx &= \int_4^\infty x^{-1.1}dx =\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[x^{-0.1}\frac{1}{-0.1}\right]_4^b =\\
&= \frac{1}{0.1\left(4^{0.1}\right)}
\end{aligned}$$

ולכן האינטגרל הנתון מתכנס.

תרגיל 10.4 תהי פונקציה $z\left(x,y\right)$ המקיימת $z^2+\ln\left(x\right)+xy+xe^{z^2+1}=1$. הוכיחו כי

$$.xz\cdot z'_x - yz\cdot z'_y = -\frac{1}{2}$$

פתרון: נשים לב ש־ $f\left(x,y,z\right)=1$ היא משוואה סתומה המגדירה את $z=z\left(x,y\right)$ כפונקציה של $\left(x,y\right)$. כמו כן, אנו רואים כי $f\left(x,y,z\right)$ היא בעלת נגזרות חלקיות רציפות. אזי לפי המשפט שלמדנו

$$\begin{aligned}
.z'_x\left(x,y\right) &= -\frac{f'_x\left(x,y\right)}{f'_z\left(x,y\right)} =\\
&= -\frac{\frac{1}{x}+y+e^{z^2+1}}{2z+xe^{z^2+1}2z}\\
z'_y\left(x,y\right) &= -\frac{f'_y\left(x,y\right)}{f'_z\left(x,y\right)} =\\
&= -\frac{x}{2z+xe^{z^2+1}2z}
\end{aligned}$$

נציב זאת באגף שמאל של המשוואה אותה צריך להוכיח ונקבל

$$\begin{aligned} xz\cdot z'_x - yz\cdot z'_y &= -x\frac{\frac{1}{x}+y+e^{z^2+1}}{2+xe^{z^2+1}2} + y\frac{x}{2+xe^{z^2+1}2} = \\ &= \frac{-1-xy-xe^{z^2+1}+yx}{2+xe^{z^2+1}2} = \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+xe^{z^2+1}}{1+xe^{z^2+1}} = \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

תרגיל 10.5 האם הטורים הבאים מתכנסים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+2n+3}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n+5^n}{3^n+6^n}$.

פתרון:

1. ננתח את האיבר ה־n של הטור.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n^2+2n+3}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} < \\ &< \frac{1}{n\left(2\sqrt{n+1}\right)} < \\ &< \frac{1}{n^{1.5}}. \end{aligned}$$

כעת נשים לב ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}} < \infty$ לפי מה שהוכחנו בכיתה ולכן הטור המקורי מתכנס לפי כללי השוואה של טורים חיוביים.

2. נוכל להראות שהטור מתכנס בהחלט ולכן בפרט הוא מתכנס. נשתמש במבחן השוואה גבולי לטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ שהוא טור גיאומטרי שמתכנס.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n+5^n}{3^n+6^n}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{5^n}\cdot\frac{6^n}{3^n+6^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{5^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{3^n+6^n} = 1 \end{aligned}$$

ולכן הטור הנתון מתכנס.

תרגיל 10.6 מצאו את טור טיילור של $\ln(1-x)$ סביב הנקודה $x_0=-2$ וחשבו את רדיוס ותחום ההתכנסות של הטור.

פתרון: נחשב את טור טיילור בעזרת הנגזרת של הפונקציה הנתונה. נשים לב ש־

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{1-x} = \\
&\overset{t=x+2}{=} -\frac{1}{1-(t-2)} = \\
&= -\frac{1}{3-t} = \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}} = \\
&\overset{\frac{t}{3}=y}{=} \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-y} = \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty} y^n
\end{aligned}$$

כאשר השיוויון האחרון מתקיים אם ורק אם $-1<y<1$ (תחום ההתכנסות של הטור הגיאומטרי / ההנדסי). לכן קיבלנו ש־

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{3}\right)^n = \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x+2)^n .
\end{aligned}$$

כעת נוכל לבצע אינטגרציה על צמד האגפים ולקבל,

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{x} f'(s)\,ds &= \int_{-2}^{x}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(s+2)^n\right)ds \\
f(x)-f(-2) &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\int_{-2}^{x}(s+2)^n\,ds \\
\ln(1-x)-\ln(3) &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\left[\frac{(s+2)^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{x} \\
\ln(1-x) &= \ln(3)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\left[\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\right] \\
\ln(1-x) &= \ln(3)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}.
\end{aligned}$$

כאמור, תחום ההתכנסות הוא

$$\begin{array}{rcl} -1< & y & <1 \\ -1< & \frac{t}{3} & <1 \\ -1< & \frac{x+2}{3} & <1 \\ .-5< & x & <1 \end{array}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 3 (סביב $x_0=-2$). בנוסף, הטור מתבדר כאשר $x=1$ (טור הרמוני) ומתכנס עבור $x=-5$ (טור לייבניץ). על כן תחום ההתכנסות הוא $[-5,1)$.

תרגיל 10.7 מצאו את כל ערכי $\alpha>0$ שעבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n^{\alpha}+n+3}}$ מתכנס.

פתרון: ננתח את הערכים השונים האפשריים עבור $\alpha>0$.

- $0<\alpha\leq 6$: עבור כל $n\geq 4$ נקבל ש־

$$\begin{array}{rcl} n^6+n^4(n-1) & > & n^{\alpha}+n+3 \\ n^6+n^5-n^4 & > & n^{\alpha}+n+3 \\ 1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2} & > & \dfrac{n^{\alpha}+n+3}{n^6} \\ 1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2} & > & \sqrt{\dfrac{n^{\alpha}+n+3}{n^6}} \end{array}$$

המעבר האחרון נכון מהסיבה הבאה. האגף השמאלי הוא גדול מ־1 בעוד האגף הימני יכול להיות גדול מ־1 או קטן מ־1. אם הוא גדול מ־1 אז השורש רק מקטין אותו והאי־שוויון נשמר. אם הוא קטן מ־1 אז בכל מקרה לאחר לקיחת השורש הוא עדיין יהיה קטן מ־1 ולכן האי־שוויון נשמר. על כן,

$$\begin{array}{rcl} 1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2} & > & \dfrac{\sqrt{n^{\alpha}+n+3}}{n^3} \\ n^3+n^2-n & > & \sqrt{n^{\alpha}+n+3} \\ \dfrac{n^2+n-1}{\sqrt{n^{\alpha}+n+3}} & > & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

ולכן קיבלנו שזנב של הטור הנתון גדול מהזנב של הטור ההרמוני ובפרט מתבדר.

- $\alpha > 6$: נשים לב ש־ $\frac{\alpha-4}{2} > 1$ ולכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש־ $\frac{\alpha-4}{2} \geq 1+\epsilon$. עבור כל $n \geq 4$ נקבל ש־

$$\begin{aligned}
\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n^\alpha+n+3}} &= \frac{n^2}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1+n^{-1}-n^{-2}}{\sqrt{1+n^{1-\alpha}+3n^{-\alpha}}} = \\
&= \frac{n^2}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1+n^{-1}-n^{-2}}{\sqrt{1+n^{1-\alpha}+3n^{-\alpha}}} < \\
&< \frac{n^2}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{1}} = \\
&= \frac{10}{n^{\frac{\alpha-4}{2}}} \leq \\
&\leq \frac{10}{n^{1+\epsilon}}.
\end{aligned}$$

אנו יודעים כי $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty$ עבור כל $\epsilon > 0$ ולכן, לפי מבחן השוואה לטורים חיוביים נובע שהטור הנתון מתכנס.

תרגיל 10.8 הוכיחו כי לכל $\alpha > 0$ הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln^\alpha(n)}$ מתבדר.

פתרון: יהי $\alpha > 0$. נוכיח את הנדרש בעזרת השוואה לטור ההרמוני. נסתכל על הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln^\alpha(x)}$. נשים לב ש־

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^\alpha(x)} = \\
&\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha \ln^{\alpha-1}(x) \frac{1}{x}} = \\
&= \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^{\alpha-1}(x)}.
\end{aligned}$$

נמשיך באותו באופן עד שנקבל $\alpha - m < 0$ ואז הגבול שיתקבל הינו $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^{\alpha-m}(x)} = \infty$ ולכן $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^\alpha(x)} = \infty$. מהגדרת הגבול נובע שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\frac{n}{\ln^\alpha(n)} > 1$ או לחילופין, $\frac{1}{\ln^\alpha(n)} > \frac{1}{n}$. לכן אם נשווה את הזנב של הטור ההרמוני מהאיבר ה־N לזנב של הטור הנתון מאותו האיבר נקבל ש־

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\ln^\alpha(n)} > \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

כנדרש.

תרגיל 10.9 תהי פונקציה $z(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכיחו כי $xz'_x + yz_y = 0$.

פתרון: נחשב את הנגזרות של הפונקציה לפי x ולפי y.

$$\begin{aligned}
z'_x(x,y) &= f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \\
z'_y(x,y) &= f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).
\end{aligned}$$

ולכן נובע ש־

$$\begin{aligned} xz'_x(x,y)+yz'_y(x,y) &= xf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}+yf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)= \\ &= f'\left(\frac{x}{y}\right)\left[\frac{x}{y}+y\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]= \\ &= f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot 0=0. \end{aligned}$$

תרגיל 10.10 מצאו את הנגזרת הכיוונית של $f(x,y)=x^3+x^2y$ בנקודה $(1,3)$ בכיוון $(1,-1)$.

פתרון: נמצא תחילה את הגרדיאנט של הפונקציה באופן כללי ובנקודה הרלוונטית.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (f_x(x,y),f_y(x,y))= \\ &= \left(3x^2+2xy,x^2\right) \\ \nabla f(1,3) &= (4,1). \end{aligned}$$

נמצא את הכיוון $\overrightarrow{v}=(1,-1)\frac{1}{\|(1,-1)\|}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= (1,-1)\frac{1}{\|(1,-1)\|}= \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

לכן הנגזרת שמבוקשת היא

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{v}}(f)(1,3) &= \nabla f(1,3)\cdot\overrightarrow{v}= \\ &= (4,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)= \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

תרגיל 10.11 נתונה הפונקציה $f(x,y)=2x^3+3x^2y-3y$. מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים במשולש הסגור הנקבע על ידי הישרים $y=\frac{1}{3}x$, $x=1$, $y=0$.

פתרון: נצטרך תחילה למצוא נקודות סטציונריות ולאחר מכן למצוא את ערכי הפונקציה בקצוות התחום.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x^2+6xy \\ f_y(x,y) &= 3x^2-3. \end{aligned}$$

נשווה לאפס ונקבל

$$\begin{aligned}
3x^2-3 &= 0\\
x^2 &= 1\\
x &= \pm 1\\
6x^2+6xy &= 0\\
x=1 \Rightarrow & \quad 6+6y=0\\
y &= -1\\
x=-1 \Rightarrow & \quad 6-6y=0\\
& \quad y=1
\end{aligned}$$

על כן יש צמד נקודות קריטיות $(1,-1)$ ו־$(-1,1)$. נמצא גם את הנגזרות החלקיות מסדר שני.

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 12x+6y\\
f_{yx}(x,y) &= 6x\\
f_{yy}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

נזכור כי $\Delta = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$ ולכן

$$\begin{aligned}
\Delta = f_{xx}(x,y)\cdot 0 - f_{xy}^2(-1,1)\\
\Delta(-1,1) = -f_{xy}^2(-1,1) < 0\\
\Delta(-1,1) = -f_{xy}^2(1,-1) < 0
\end{aligned}$$

ומכאן נובע שצמד הנקודות הן נקודות אוכף. נמצא את ערכי הפונקציה בקצוות התחום הנקבע על ידי הישרים $y=0,\ x=1,\ y=\frac{1}{3}x$. $f(x,y)=2x^3+3x^2y-3y$.

- כאשר $y=0$ נקבל ש־

$$.f(x,0)=2x^3$$

המקסימום במקרה זה הוא ב־ $x=1$ (הערך הוא 2) והמינימום ב־$x=0$ (הערך של הפונקציה בנקודה הוא 0).

- כאשר $x=1$ נקבל ש־

$$.f(1,y)=2+3y-3y=2$$

על כן הפונקציה קבועה ושווה ל־2 על הקו $x=1$.

- כאשר $y=\frac{1}{3}x$ נקבל ש־

$$\begin{aligned}
f\left(x,\frac{1}{3}x\right) &= 2x^3+3x^2\cdot\frac{1}{3}x-3\cdot\frac{1}{3}x=\\
&= 2x^3+x^3-x=\\
&= 3x^3-x.
\end{aligned}$$

נמצא לפונקציה הנתונה את נקודות הקיצון.

$$f'\left(x,\frac{1}{3}x\right)=9x^2-1=0$$
$$x^2=\frac{1}{9}$$
$$x=\pm\frac{1}{3}.$$

הנקודה שנמצאת בתחום שלנו היא $x=\frac{1}{3}$ והערך בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$ הוא

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)&=2\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right)-3\left(\frac{1}{9}\right)=\\&=\frac{2}{27}+\frac{1}{27}-\frac{1}{3}=\\&=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

לסיכום, מצאנו בתחום המשולש הסגור הנתון שתי נקודות אוכף $(1,-1)$ ו־$(-1,1)$, נקודות מינימום מוחלטת $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)$ ונקודות מקסימום כאשר $x=1$ ו־ $0\le y\le\frac{1}{3}$.

תרגיל 10.12 נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+y^2x-x$.

1. מצאו את כל נקודות האוכף, מינימום ומקסימום מקומי שלה.
2. מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים בעיגול $\left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 9\right\}$.

פתרון:

1. נמצא תחילה את הנגזרות החלקיות ולאחר מכן את ננתח אותן.

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=x^2+y^2-1\\f_y(x,y)&=2yx\\f_{xx}(x,y)&=2x\\f_{yy}(x,y)&=2x\\f_{xy}(x,y)&=2y\end{aligned}$$

בעזרת הנגזרות הראשונות נמצא את הנקודות הסטציונריות.

$$\begin{aligned}0&=x^2+y^2-1\\0&=2yx\end{aligned}$$

ישנן 2 אפשרויות ־ $x=0$ או $y=0$. אם $x=0$ אז

$$\begin{aligned}0&=y^2-1\\y&=\pm1.\end{aligned}$$

ובאופן סימטרי נקבל שאם $y=0$ אז $x=\pm 1$. לכן מצאנו 4 נקודות חשודות $(\pm 1,0),(0,\pm 1)$. ננתח כל נקודה בנפרד.

$$\begin{aligned}
\Delta(x,y) &= f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}^2(x,y)= \\
&= 4x^2-(2y)^2 \\
\Delta(1,0) &= 4>0 \\
\Delta(-1,0) &= 4>0 \\
\Delta(0,1) &= -4<0 \\
\Delta(0,-1) &= -4<0
\end{aligned}$$

על כן, הנקודות $(0,1),(0,-1)$ הן נקודות אוכף, הנקודה $(1,0)$היא נקודת מינימום ו־$(-1,0)$היא נקודת מקסימום.

2. נבדוק את ערכי הפונקציה על השפה. כאשר $x^2+y^2=9$ אזי

$$\begin{aligned}
f\left(x,\sqrt{9-x^2}\right) &= \frac{1}{3}x^3+\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2x-x= \\
&= \frac{1}{3}x^3+x\left(9-x^2\right)-x= \\
&= \frac{1}{3}x^3+9x-x^3-x= \\
&= -\frac{2}{3}x^3+8x.
\end{aligned}$$

נמצא נקודות קיצון לפונקציה זו.

$$\begin{aligned}
f'\left(x,9-x^2\right) &= -2x^2+8=0 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm 2.
\end{aligned}$$

על כן קיבלנו נקודות קיצון $\left(-2,\pm\sqrt{5}\right),\left(2,\pm\sqrt{5}\right)$. נציב כעת את כלל הנקודות

בפונקציה ונקבל את נקודות המקסימום והמינימום המוחלטות.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{3}x^3+y^2x-x \\
f(1,0) &= \frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \\
f(-1,0) &= -\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3} \\
f(0,1) &= 0 \\
f(0,-1) &= 0 \\
f\left(2,\sqrt{5}\right) &= \frac{8}{3}+10-2=10\frac{2}{3} \\
f\left(-2,\sqrt{5}\right) &= -\frac{8}{3}-10+2=-10\frac{2}{3} \\
f\left(2,-\sqrt{5}\right) &= \frac{8}{3}+10-2=10\frac{2}{3} \\
f\left(-2,-\sqrt{5}\right) &= -\frac{8}{3}-10+2=-10\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ולכן הנקודות $\left(2,\pm\sqrt{5}\right)$ הן נקודות מקסימום בתחום ו־$\left(-2,\pm\sqrt{5}\right)$הן נקודות מינימום.

10.2 מבחן מועד א' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2014.

10.2.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 10.13 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נסחו והוכיחו את משפט ההשוואה הגבולי לטורים חיובים.
2. קבעו האם הטור מתכנס $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n^3+n+1}{n^4+3n+1}}$. הוכיחו את טענותיכם.

פתרון:

1. בהתאם להוכחה שניתנה בשיעור.
2. נשתמש במשפט שהוכחנו בסעיף א' תוך השוואה לטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ אשר אנו יודעים שאינו מתכנס.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^3+n+1}{n^4+3n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4+n^2+n}{n^4+3n+1}}= \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+n^{-2}+n^{-3}}{1+3n^{-3}+n^{-4}}}=1,
\end{aligned}$$

ולכן הטור הנתון מתבדר לפי משפט השוואה גבולי לטורים חיוביים.

תרגיל 10.14 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ בסביבת 0 מתקיים $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
2. מהו תחום ההתכנסות של הטור מסעיף א'? הוכיחו את טענותיכם.

פתרון:

1. הוכחה מתבצעת בהתאם להוכחה שניתנה בשיעור, באמצעות בחינת הטור של

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x}$$

החלפת משתנים ושימוש בנוסחה של הטור ההנדסי.

2. נשתמש במשפט המנה בכדי למצוא את רדיוס ההתכנסות ולאחר מכן נקבע את תחום ההתכנסות.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 \end{aligned}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1. נבדוק התכנסות בנקודות $x = \pm 1$. כאשר $x = 1$ נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ שזהו טור לייבניץ ובפרט מתכנס. כאשר $x = -1$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$$

ולכן לא מתכנס. לסיכום, תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1]$.

10.2.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 10.15 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. חשבו את האינטגרל $\int \frac{dx}{\cos^4(x)}$ (רמז: $t = \frac{1}{\cos(x)}$).
2. הוכיחו כי $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{x/\pi}}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \pi \cdot e$.

פתרון:

1. השאלה הופיעה בתרגיל בית 2 וזה הפתרון הרשמי שפורסם עבורה.

$$\int \frac{1}{\cos^4(x)}dx \underset{t=\frac{1}{\cos(x)},\ dt=\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx}{=} \int t^4 \frac{1}{t^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}dt = \\ = \int \frac{t^3}{\sqrt{t^2-1}}dt =$$

נבצע החלפת משתנים נוספת.

$$-\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2-1}}dt = \underset{t^2-1=y,\ 2tdt=dy}{=} \frac{1}{2}\int \frac{y+1}{\sqrt{y}}dy = \\ = \frac{1}{2}\int \sqrt{y}dy - \frac{1}{2}\int y^{-0.5}dy = \\ = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + C = \\ = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)^{\frac{1}{2}} + C = \\ = \frac{1}{3}\left(\tan^2(x)\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\tan^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} + C = \\ = \frac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x) + C$$

2. שימו לב שזאת שאלה מאוד מאוד דומה לשאלה האחרונה שניתנה בתרגיל בית 3. $\frac{\pi}{2} \le \int_0^\pi \frac{e^{x/\pi}}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \le \pi \cdot e$. לכל $x \in [0,\pi]$ מתקיים ש־ $1 \le e^{x/\pi} \le e$ (כאשר e^x היא פונקציה מונוטונית עולה) ובנוסף בתחום זה $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ היא פונקציה יורדת שחסומה בין 0 ל־1 ולכן $1 \le 1+\cos\left(\frac{x}{2}\right) \le 2$ או לחילופין

$$.\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \le 1$$

בפרט אנחנו מקבלים שלכל $c \in [0,\pi]$ מתקיים ש־

$$\frac{1}{2} \le \frac{e^{c/\pi}}{1+\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \le \frac{e}{1}$$

ולפי משפט הערך הממוצע לאינטגרלים נקבל שקיימת נקודה $c \in [0,\pi]$ כך ש־

$$,\frac{1}{2} \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^{x/\pi}}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{c/\pi}}{1+\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \le e$$

ובפרט,

$$.\frac{\pi}{2} \le \int_0^\pi \frac{e^{x/\pi}}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \le \pi e$$

תרגיל 10.16 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. קבעו האם הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{3n^3-n+3}\right)^{2n}.$$

2. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2(n)}{n}$ מתכנס.

פתרון:

1. נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^3-n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\frac{0}{3}=0,$$

ולכן קיים $N>0$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים

$$0<\left(\frac{2n^2+n+1}{3n^3-n+3}\right)^2<q<1$$

עבור $0<q<1$ כלשהו. בפרט נקבל ש־

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{3n^3-n+3}\right)^{2n}<\sum_{n=N}^{\infty}q^n<\infty$$

לפי התכנסות טור גיאומטרי עם $|q|<1$. לכן על פי משפט השוואה לטורים חיובים נקבל שהטור הנ"ל מתכנס.

2. נוכיח בעזרת טורי לייבניץ. נראה ש־ $\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)_{n\geq1}$ זו סדרה מונוטונית יורדת מערך N כלשהו והלאה וכן שהיא שואפת לאפס. נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{\ln^2(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x)}{x}=\\ &\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x)}{x}=\\ &\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0,\end{aligned}$$

ולכן הסדרה שואפת לאפס. נשים לב שהסדרה היא חיובית ממש לכל $n\geq2$. נוכיח שהיא מונוטונית יורדת בעזרת הפונקציה.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2\ln(x)\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2(x)\cdot1}{x^2}=\\ &= \frac{2\ln(x)-\ln^2(x)}{x^2}=\\ &= \frac{\ln(x)}{x}(2-\ln(x))<0\end{aligned}$$

לכל $x > e^2$. לכן קיבלנו ש־ $\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)_{n\geq 8}$ זו סדרה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס. על כן הטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2(n)}{n}$ הוא טור לייבניץ ובפרט מתכנס ומכאן נובע שהטור המקורי מתכנס.

תרגיל 10.17 3 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. פתחו את $f(x) = \left(x^2+1\right)\arctan(x)$ לטור טיילור סביב $x_0 = 0$.
2. עבור הפונקציה בסעיף א', חשבו את $f^{(17)}(0)$.
3. כתבו את טור טיילור של $f'(x)$ סביב $x_0 = 0$.

פתרון: השאלה די דומה הופיעה בתרגיל בית 10.

1. נשתמש בפיתוח טיילור של $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. נזכור כי הפונקציה שווה לפיתוח טיילור שלה בסביבה של $x_0 = 0$ ולכן

$$\begin{aligned}\left(x^2+1\right)\arctan(x) &= \left(x^2+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+3}.\end{aligned}$$

שימו לב שניתן היה להשאיר את התשובה כשני טורים כפי שמוצג לעיל, או לאחד אותם לטור אחד.

$$\begin{aligned}\left(x^2+1\right)\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+3} = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+3} = \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}x^{2n+3} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+3} = \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)x^{2n+3}\right] = \\ &= x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}.\end{aligned}$$

2. בכדי למצוא את הנגזרת ה־17 צריך למצוא את המקדם a_{17} בטור. אם הפתרון הוצג בסעיף הקודם בשני טורים אז המקדם a_{17} זה כל המספרים שכופלים את x^{17} ולכן

$$\begin{aligned}a_{17} &= \frac{(-1)^8}{2\cdot 8+1} + \frac{(-1)^7}{2\cdot 7+1} = \\ &= \frac{1}{17} - \frac{1}{15} = \frac{-2}{255}.\end{aligned}$$

במידה והפתרון הוצג כטור יחיד נקבל

$$\begin{aligned} a_{17} &= \frac{2\left(-1\right)^7}{\left(2\cdot 7+1\right)\left(2\cdot 7+3\right)}= \\ &= \frac{2\left(-1\right)^7}{15\cdot 17}=\frac{-2}{255}. \end{aligned}$$

נשתמש במקדם בכדי למצוא את הנגזרת.

$$\begin{aligned} f^{(17)}\left(0\right) &= a_{17}17!= \\ &= \frac{-2}{255}\cdot 17!= \\ &= -32\cdot 14!. \end{aligned}$$

3. נגזור את הטור שקיבלנו בסעיף א'.

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\left(x^{2n+1}\right)'+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\left(x^{2n+3}\right)'= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(2n+3\right)}{2n+1}x^{2n+2}, \end{aligned}$$

או לחילופין,

$$.f'\left(x\right) = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)}x^{2n+2}$$

תרגיל 10.18 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

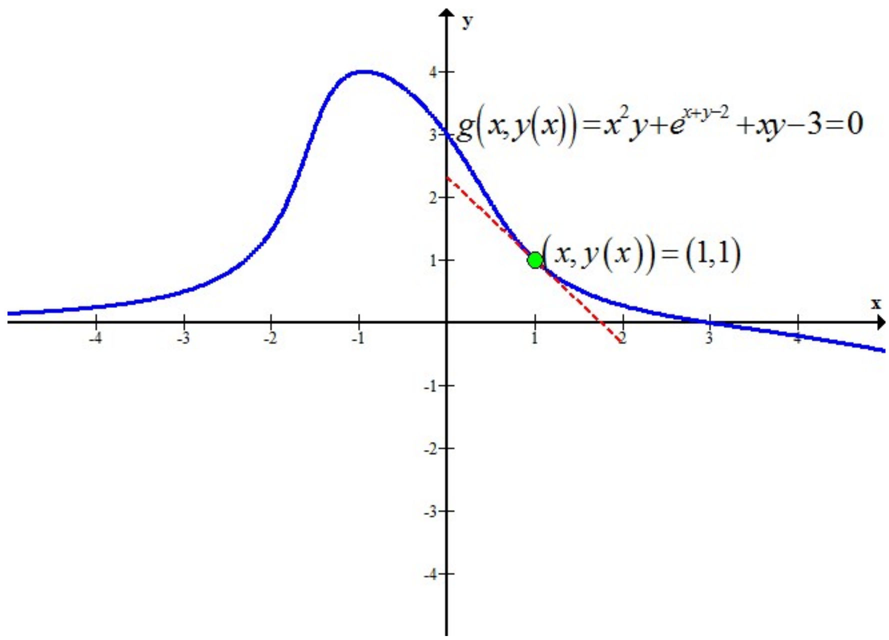
1. חשבו את הנגזרת הכיוונית בנקודה $(0,0)$ של הפונקציה $f\left(x,y\right)=x^2y+xe^{x-y}$ ובכיוון המשיק לעקומה $x^2y+e^{x+y-2}+xy=3$ בנקודה $(1,1)$.
2. מצאו את וקטור הכיוון $\overrightarrow{v}$ שעבורו $D_{\overrightarrow{v}}\left(f\right)\left(0,0\right)$ מינימאלי.

פתרון:

1. נרצה למצוא תחילה את הכיוון המשיק לעקומה הנתונה בנקודה $(1,1)$. העקומה $g\left(x,y\left(x\right)\right)=x^2y+e^{x+y-2}+xy=3$ נותנת לנו את למעשה קו גובה כלשהו. נמצא את המשיק בנקודה $(1,1)$. נשים לב שהעקומה עוברת בנקודה ולכן אם $x=1$ אז $y=1$.

$$\begin{aligned} y'\left(x\right) &= -\frac{g_x\left(x,y\left(x\right)\right)}{g_y\left(x,y\left(x\right)\right)}= \\ &= -\frac{2xy+e^{x+y-2}+y}{x^2+e^{x+y-2}+x} \\ y'\left(1\right) &= -\frac{2+3^0+1}{1+3^0+1}=-\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

קיבלנו את שיפוע הקו המשיק לעקומה בנקודה, ראו איור 28.
כעת נמצא את וקטור הכיוון בנקודה הזאת בעזרת נרמול. נזכור כי הכיוון הוא



איור 28: העקומה $g(x,y(x))$ והשיפוע בנקודה $(1,1)$.

$$(x,y)=\left(1,-\frac{4}{3}\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1^2&=\frac{16}{9}+1=\\&=\frac{25}{9}\\\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1^2}&=\frac{5}{3}\\&\Rightarrow(x,y)=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right).\end{aligned}$$

זאת אומרת, וקטור הכיוון הוא בקירוב $\overrightarrow{v}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$. נשתמש בנוסחה עבור נגזרת כיוונית בנקודה.

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2xy+e^{x-y}+xe^{x-y}\\f_y(x,y)&=x^2-xe^{x-y}\end{aligned}$$

לכן,

$$D_{\overrightarrow{v}}(f)(0,0)=\frac{3}{5}\cdot f_x(0,0)-\frac{4}{5}\cdot f_y(0,0)= \\ =\frac{3}{5}\cdot(0+1+0)-\frac{4}{5}\cdot(0-0)= \\ =\frac{3}{5}.$$

2. השאלה כמעט זהה לשאלות שפתרנו בתרגול למעט העובדה שפה נדרש מינימום ואנו מצאנו את הכיוון בו השינוי מקסימאלי. יחד עם זאת, הפתרון מתבצע באותו האופן. נתחיל במציאת הגרדיאנט בנקודה.

$$\nabla f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))= \\ =\left(2xy+e^{x-y}+xe^{x-y},x^2-xe^{x-y}\right) \\ \nabla f(0,0)=(1,0).$$

אנו צריכים למצוא את הוקטור $\overrightarrow{v}$ כך שהנגזרת $D_{\overrightarrow{v}}(f)(0,0)$ בכיוונו היא מינימאלית. נשתמש במכפלה הסקלארית ונקבל,

$$D_{\overrightarrow{v}}(f)(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\overrightarrow{v}= \\ =\|\nabla f(0,0)\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\cos(\theta)= \\ =\|(1,0)\|\cdot 1\cdot\cos(\theta)=\cos(\theta).$$

כאשר המעבר השלישי הוא בגלל ש־$\overrightarrow{v}$ הוא וקטור באורך 1. כעת אנו יודעים שהדבר היחיד שמשפיע על גודל הנגזרת זו הזווית ואנו יודעים גם ש־ $-1\le\cos(\theta)\le 1$ והוא שווה ל־-1 כאשר $\theta=\pi$ לכן נדרוש שהזווית תהיה π. זאת אומרת,

$$\overrightarrow{v}=(-1,0).$$

תרגיל 10.19 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. מצאו ומיינו את כל הנקודות הסטציונריות (מינימום, מקסימום ואוכף) של הפונקציה $f(x,y)=2xy^2-yx^2+4xy$.
2. מצאו את הערך המקסימאלי של הפונקציה $f(x,y)=2x^4+3y^4+1$ בעיגול היחידה $x^2+y^2\le 1$ (הערה: ניתן להניח שקיים מקסימום).

פתרון:

1. נמצא נגזרות חלקיות ונשווה לאפס.

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \left(2y^2-2yx+4y,4xy-x^2+4x\right)\\ 0 &= 2y^2-2yx+4y,\\ 0 &= 4xy-x^2+4x.\end{aligned}$$

אם $x=0$ אז

$$\begin{aligned} 0 &= 2y^2+4y \\ y_1 &= 0 \\ y_2 &= -2. \end{aligned}$$

לכן $(0,-2),(0,0)$ הן נקודות חשודות. אם $y=0$ נקבל

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2+4x \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

לכן $(4,0),(0,0)$ הן נקודות חשודות. אחרת $x,y\neq 0$ והמשוואות הנ"ל יהפכו ל־

$$\begin{aligned} 0 &= 2y-2x+4 \\ 0 &= 4y-x+4. \end{aligned}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן את הנקודה $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$. נחשב נגזרות חלקיות מסדר שני.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2y \\ f_{yx}(x,y) &= 4y-2x+4 \\ f_{yy}(x,y) &= 4x \end{aligned}$$

נזכור כי $\Delta=f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)-f_{xy}^2(x,y)$ ולכן

$$\Delta(0,0)=f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=-16<0$$
$$\Delta(0,-2)=f_{xx}(0,-2)\,f_{yy}(0,-2)-f_{xy}^2(0,-2)=-16<0$$
$$\Delta(4,0)=f_{xx}(4,0)\,f_{yy}(4,0)-f_{xy}^2(4,0)=-16<0$$
$$\Delta\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)=f_{xx}\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)f_{yy}\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)-f_{xy}^2\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)>0$$

לכן, הנקודות $(4,0),(0,-2),(0,0)$ הן נקודות אוכף ו־$\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ היא נקודת מינימום.

2. נמצא נקודות סטציונריות לפונקציה הנתונה.

$$\nabla f(x,y) = \left(8x^3,12y^3\right).$$

הנקודה הסטציונרית היחידה היא $(0,0)$. נבחן את הנגזרות החלקיות מסדר שני.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 24x^2 \\ f_{yx}(x,y) &= 0 \\ f_{yy}(x,y) &= 36y^2 \end{aligned}$$

ולכן $\Delta(0,0)==0$ ולא ניתן לקבוע האם הנקודה היא נקודת מקסימום. נשים לב ש־ $f(0,0)=1$ בעוד, לדוגמא, $f(1,0)>1$ ולכן הנקודה $(0,0)$ איננה נקודת

מקסימום. נבדוק את ערכי הפונקציה על השפה, כאשר $x^2+y^2=1$, או לחילופין $y^2=1-x^2$.

$$\begin{aligned} f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right) &= 2x^4+3\left(1-x^2\right)^2+1= \\ &= 5x^4-6x^2+4. \end{aligned}$$

קיבלנו פונקציה במשתנה אחד ונוכל למצוא לה מקסימום על ידי גזירה.

$$\begin{aligned} \left(5x^4-6x^2+4\right)' &= 20x^3-12x=0 \\ x_1 &= 0 \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

נחשב נגזרת שנייה.

$$\left(5x^4-6x^2+4\right)'' = 60x^2-12 .$$

מהצבה נקבל ש־ $x_1=0$ זו נקודת מקסימום ולכן נקודת המקסימום בפונקציה המקורית היא $\left(x_1,\sqrt{1-x_1^2}\right)=(0,\pm1)$. כאשר נציב חזרה בפונקציה נקבל שהערך המקסימאלי של הפונקציה הוא 4.

תרגיל 10.20 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. בעזרת פולינום טיילור בלבד, כתבו את הפולינום $p(x)=1-x+x^2+x^3+x^4$ כפולינום במשתנה $(x+1)$.
2. תהיי פונקציה $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ונניח שקיים M שעבורו $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ לכל n טבעי ו־ x ממשי. תהיי x_0 נקודה כלשהי ויהי $T_f(x)$ טור טיילור של f סביב x_0. הוכיחו כי לכל x מתקיים $f(x)=T_f(x)$.

פתרון:

1. זו שאלה שהיא כמעט זהה לשאלה שהופיעה בתרגיל בית 11. למעשה זאת שאלה יותר קלה מאחר ובתרגיל בית 11 ניתן פולינום יותר מסובך וארוך. נמצא את הנגזרות של הפולינום מכל סדר רלוונטי בנקודה $x_0=-1$.

$$\begin{aligned} p^{(0)}(x)=1-x+x^2+x^3+x^4 \quad &, \quad p^{(0)}(-1)=3 \\ p^{(1)}(x)=-1+2x+3x^2+4x^3 \quad &, \quad p^{(1)}(-1)=-4 \\ p^{(2)}(x)=2+6x+12x^2 \quad &, \quad p^{(2)}(-1)=8 \\ p^{(3)}(x)=6+24x \quad &, \quad p^{(3)}(-1)=-18 \\ p^{(4)}(x)=24 \quad &, \quad p^{(4)}(-1)=24 \\ p^{(5)}(x)=0 \quad &, \quad p^{(n)}(-1)=0 \;\; \forall n>4 \end{aligned}$$

נוכל כעת לרשום את טור טיילור של הפונקציה.

$$\begin{aligned} T_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x+1)^n = \\ &= 3-4(x+1)+4(x+1)^2-3(x+1)^3+(x+1)^4 \end{aligned}$$

נשים לב בנוסף שהנגזרת מכל סדר 5 ומעלה מתאפסת תמיד ולכן הסכום שקיבלנו שווה לפולינום בכל נקודה. הטיעון האחרון תקף בגלל משפט השארית וכי השארית מסדר 5 ומעלה שווה זהותית ל־0 בכל נקודה.

2. השאלה הופיעה בתרגיל בית 10. להלן הפתרון הרשמי שפורסם עבורה. נמצא את שארית לגראנג' מסדר N ונחסום אותה מלמעלה. לאחר מכן נוכיח כי היא שואפת ל־0 בכל $x \in \mathbb{R}$. יהי $x \in \mathbb{R}$, אזי קיימת נקודה $c \in [0,x]$ שעבורה

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-0)^{N+1} = \\ &= \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1} \end{aligned}$$

מן הנתון נובע ש־

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &= \frac{\left|f^{(N+1)}(c)\right|}{(N+1)!}x^{N+1} < \\ &< M\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \end{aligned}$$

לכן אם נראה ש־

$$\lim_{N\to\infty} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = 0$$

ינבע ש־ $\lim_{N\to\infty} T_N(x) = f(x)$. ניתן לקבוע בשלב זה שראינו שהגבול הנ"ל שואף לאפס בתרגול ובשיעורים מספר פעמים. לחילופין ניתן להוכיח את הגבול באופן הבא. נשתמש בחסם שהוכחנו בעבר עבור $N!$,

$$\begin{aligned} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} &\le \frac{x^{N+1}}{c\left(\frac{N+1}{e}\right)^{N+1}} = \\ &= \frac{1}{c}\cdot\frac{(x\cdot e)^{N+1}}{(N+1)^{N+1}} = \\ &= \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{x\cdot e}{N+1}\right)^{N+1} = \\ &= \frac{1}{c}\cdot e^{(N+1)\left[\ln\left(\frac{x\cdot e}{N+1}\right)\right]} = \\ &= \frac{1}{c}\cdot e^{(N+1)[\ln(x\cdot e)-\ln(N+1)]} \end{aligned}$$

לכן כאשר ניקח את הגבול ש־ $N \to \infty$ נקבל ש־

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} &= \frac{1}{c}\lim_{N\to\infty}e^{(N+1)[\ln(x\cdot e)-\ln(N+1)]} = \\ &= \frac{1}{c}\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

כי

$$\lim_{N\to\infty}(N+1)\left[\ln(x\cdot e)-\ln(N+1)\right] \overset{"\infty\cdot(C-\infty)"}{=} -\infty.$$

לסיכום, השארית שואפת לאפס ולכן הפונקציה שווה לטור בכל נקודה.

10.3 מבחן מועד ב' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2014.

10.3.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 10.21 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נסחו והוכיחו את מבחן השורש לטורים חיוביים.
2. קבעו האם הטור מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^{2n+1/2}}{3^{2n+1}}$. הוכיחו את טענותיכם.

פתרון:

1. בהתאם להוכחה שניתנה בשיעור.
2. הטור מתכנס ונראה זאת בעזרת מבחן השוואה לאחר פישוט הביטוי של האיבר הכללי.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{6^{2n+1/2}}{3^{2n+1}} &= \sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\sqrt{6}\right)^{2n+1}}{3^{2n+1}}= \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\sqrt{6}\right)^{2n}}{3^{2n}}= \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{6^n}{9^n}= \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

ז"א, האיבר הכללי של הטור קטן מ- $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ לכל n כי

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n<\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

מאחר והטור $\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס, נובע שגם הטור הנתון מתכנס.

תרגיל 10.22 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. הוכיחו כי לכל $x\in\mathbb{R}$ בסביבת 0 מתקיים $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.
2. תהי $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n}$. חשבו את הערך של $f(x)$ כאשר היא מוגדרת. הערה - אין צורך לחשב את תחום ההגדרה של $f(x)$. נמקו את טענותיכם.

פתרון:

1. בהתאם להוכחה שניתנה בשיעור.

2. נניח תחילה כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת כפי שנתון.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n} = \\ &= (-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n} = \\ &= (-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(x^2\right)^n}{n} = \\ &= -x \ln\left(1+x^2\right). \end{aligned}$$

10.3.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 10.23 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. (שאלה מהתרגיל) חשבו את האינטגרל $\int_0^2 \ln\left(1+x^2\right) dx$.

2. הוכיחו בעזרת הגדרת האינטגרביליות כי הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ היא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

פתרון:

1. שאלה מתרגיל בית 3. הפתרון הרשמי הוא

$$\begin{aligned} \int_0^2 \ln\left(x^2+1\right) dx &= \int_0^2 1 \cdot \ln\left(x^2+1\right) dx = \\ &= \left[x \ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{(x^2+1)} dx = \\ &= 2\ln(5) - 2\left[\int_0^2 \frac{x^2+1}{(x^2+1)} dx - \int_0^2 \frac{1}{(x^2+1)} dx\right] = \\ &= 2\ln(5) - 2\left[x - \arctan(x)\right]_0^2 = \\ &= 2\ln(5) - 2\left[2 - \arctan(2) - 0 + \arctan(0)\right] = \\ &= 2\left[\ln(5) - 2 + \arctan(2)\right] = 1.4331 \end{aligned}$$

2. חלק את הקטע $[0,1]$ לקטעים באורך $\frac{1}{n}$ ולאחר מכן ניקח את הגבול $n\to\infty$. נשים לב שלכל $i=0,\dots,n-1$, $[x_i,x_{i+1}]=\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ ובנוסף, מאחר והפונקציה היא מונוטונית יורדת ממש בקטע זה, אז הערכים המקסימאליים והמינימאליים בכל קטע הם קצוות הקטע. זאת אומרת,

$$m_i=\min_{x\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]}e^{-x}=e^{-\frac{i+1}{n}}<e^{-\frac{i}{n}}=\max_{x\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]}e^{-x}=M_i\ \forall i=0,\dots,n-1.$$

נציין כי אורך כל קטע הינו $h=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$. נחשב את הסכומים $\underline{S_n},\ \overline{S_n}$ בצורה מפורשת ונקבל,

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\cdot h=\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\frac{i+1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{e^{-1/n}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\frac{i}{n}},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\cdot h=\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\frac{i}{n}}.$$

נשים לב כי כאשר ניקח את הגבול $n\to\infty$ נגיע לתוצאה,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}-\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}&=\lim_{n\to\infty}\left[\underline{S_n}-\overline{S_n}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-1/n}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\frac{i}{n}}-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\frac{i}{n}}\right]=\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(e^{-1/n}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{i}{n}}\right)\right]=0\end{aligned}$$

נשים לב שהטור הוא טור חיובי שמתכנס כי

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{i}{n}}\right)<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}=1$$

ובנוסף הביטוי שמימין לטור שואף לאפס, לכן האינטגרל מתכנס לפי הגדרה. חשוב לציין שכל אחד מהגבולות מתכנס בפני עצמו לפי אותם הטיעונים שראינו קודם לכן ובפרט ניתן להשתמש באריתמטיקה של גבולות כפי שעשינו.

תרגיל 10.24 סעיף 1, 19 נקודות. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+4)}{n^2+6n+10}$ מתכנס בתנאי לסכום s המקיים $-\frac{7}{17}<s<0$.

פתרון: בכדי לחשב את הטור נשתמש בנוסחה לטור לייבניץ. נראה שהטור לא מתכנס בהחלט, אבל כן מדובר בטור לייבניץ ולכן הוא מתכנס בתנאי. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^2+6n+10}$ לא מתכנס כפי שמבחן ההשוואה הגבולי הבא מראה.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+4}{n^2+6n+10}}{\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{n^2+6n+10}=\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+4\frac{1}{n}}{1+6\frac{1}{n}+10\frac{1}{n^2}}=3.\end{aligned}$$

מאחר והרטו ההרמוני מתבדר, נובע שהטור לא מתכנס בהחלט. נראה שמדובר בטור לייבניץ. נשים לב שהטור הוא טור עם סימנים מתחלפים וכמו כן האיבר הכללי שואף לאפס.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n^2+6n+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{1}{n}+4\frac{1}{n^2}}{1+6\frac{1}{n}+10\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

נותר להראות שהסדרה המרכיבה את הטור היא מונוטונית יורדת. נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+6x+10}$ ונגזור אותה.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\left(x^2+6x+10\right)-(3x+4)(2x+6)}{\left(x^2+6x+10\right)^2} = \\ &= \frac{3x^2+18x+30-\left(6x^2+18x+8x+24\right)}{\left(x^2+6x+10\right)^2} = \\ &= \frac{-3x^2-8x+6}{\left(x^2+6x+10\right)^2} < 0 \end{aligned}$$

לכל $x \geq 1$ ולכן הפונקציה היא מונוטונית יורדת וכן גם הסדרה. על כן מדובר בטור לייבניץ שמתכנס בתנאי. כפי שלמדנו לגבי טורי לייבניץ, אם הטור מתכנס ל־s אזי

$$\begin{aligned} a_1 < & \quad s \quad < 0 \\ -\frac{7}{17} < & \quad s \quad < 0 \end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 10.25 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{(n+1)^2}$ מתכנס.
2. חשבו את הערך של הטור הטלסקופי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

פתרון:

1. נראה שקיים N טבעי כך ש־$\frac{\ln(n)}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)^{1.5}}$ לכל $n > N$ ולכן לפי התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{1.5}}$ (כפי שהוכחנו בכיתה ובתרגול) נובעת התכנסות הטור הנתון גם כן. נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{(x+1)^{1.5}\ln(x)}{(x+1)^2}$ ונוכיח שהפונקציה שואפת לאפס כאשר $x \to \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{1.5}\ln(x)}{(x+1)^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{(x+1)^{0.5}} = \\ \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} & \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2(x+1)^{0.5}}} = \\ &= 2\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{0.5}}{x} = \\ &= 2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{0.5} = 0 \end{aligned}$$

לכן נובע שמערך כלשהו והלאה מתקיים ש־ $\frac{(x+1)^{1.5}\ln(x)}{(x+1)^2} < 1$ ובפרט

$$.\frac{\ln(x)}{(x+1)^2} < \frac{1}{(x+1)^{1.5}}$$

על כן קיים N טבעי כך ש־ $\frac{\ln(n)}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)^{1.5}}$ לכל $n > N$ ובפרט נובע שהזנבות מתכנסים יחדיו וכן גם הטורים עצמם.

2. נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים. נפצל את השבר לשני שברים ונוסיף ונחסר איברים בכדי לקבל צמד טורים טלסקופיים.

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{(n+3)}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right] + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{(n+3)}\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+3}\right) = \\
&= \frac{5}{12} - \frac{1}{2(N+2)} - \frac{1}{2(N+3)}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2(N+2)} - \frac{1}{2(N+3)}\right) = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

תרגיל 10.26 3 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. תהיי פונקציה

$$.f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. קבעו האם הפונקציה רציפה בתחום הגדרתה.

2. מצאו נוסחה ל־ $f_x(x,y)$ בכל נקודה בה היא מוגדרת.

3. חשבו את הערך $D_{\vec{v}}(f)(0,0)$ בכיוון $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

פתרון:

1. זו פונקציה ושאלה שענינו עליה באחד התרגולים. מצ"ב הפתרון הרשמי מחוברת המתרגל שניתן גם במהלך התרגול. נשים לב תחילה כי תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה הוא כל המישור. בנוסף, בכל נקודה $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ הפונקציה היא מכפלה, חילוק וחיבור של פונקציות רציפות כאשר המכנה שונה מ־0 ולכן גם הפונקציה עצמה רציפה ומוגדרת היטב. נותר לבדוק מה קורה כאשר $(x_0,y_0)=(0,0)$. נוכיח כי הגבול של הפונקציה הוא $L=0$. נשים לב לפיתוח האלגברי הבא. לכל $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left(x^2-y\right)^2 &\geq 0\\ x^4-2x^2y+y^2 &\geq 0\\ x^4+y^2 &\geq 2x^2y\\ \frac{1}{2} &\geq \frac{x^2y}{x^4+y^2}.\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right|=\\ &= \left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right||y|\leq\\ &= \frac{1}{2}|y|.\end{aligned}$$

כאשר $(x,y)\to(0,0)$ נובע בפרט ש־ $y\to 0$ ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)| &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}|y|=\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}|y|=0\end{aligned}$$

וקיבלנו שהפונקציה רציפה ב־0 גם כן. קרי, הפונקציה היא פונקציה רציפה.

2. נשתמש בהגדרת הנגזרת הכיוונית בכדי לבדוק האם הנגזרת מוגדרת ב־$(0,0)$.

$$\begin{aligned}f_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0\end{aligned}$$

ולכן לפי ההגדרה יש נגזרת כיוונית בנקודה זו. עבור $(x,y)\neq(0,0)$נוכל לגזור את הפונקציה בצורה מפורשת.

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \frac{2xy^2\left(x^4+y^2\right)-x^2y^24x^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\\ &= \frac{2xy^4-2x^5y^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}.\end{aligned}$$

לכן מצאנו את הנגזרת הכיוונית בכל נקודה.

3. נמצא תחילה את הנגזרות הכיווניות בנקודה, כאשר את הנגזרת בכיוון x מצאנו בסעיף הקודם.

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y-0} = 0. \end{aligned}$$

נשתמש בנוסחה לנגזרת כיוונית ונקבל

$$D_{\overrightarrow{v}}(f)(0,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot f_x(0,0) - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot f_y(0,0) = 0.$$,

תרגיל 10.27 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. תהיי פונקציה $f(x,y) = \left((y+1)^2+2x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2}$.

1. מצאו את כל הנקודות הסטציונריות של הפונקציה.
2. מיינו את הנקודות שמצאתם בסעיף הקודם לנקודות מינימום / מקסימום / אוכף.

פתרון:

1. נתחיל במציאת הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4xe^{-(y+1)^2-x^2} - 2x\left((y+1)^2+2x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2} = \\ &= \left(4x - 2x\left((y+1)^2+2x^2\right)\right)e^{-(y+1)^2-x^2}, \\ f_y(x,y) &= 2(y+1)e^{-(y+1)^2-x^2} - 2(y+1)\left((y+1)^2+2x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2} = \\ &= \left(2(y+1) - 2(y+1)\left((y+1)^2+2x^2\right)\right)e^{-(y+1)^2-x^2}. \end{aligned}$$

נשווה לאפס ונקבל,

$$\begin{aligned} 2x\left(2-(y+1)^2-2x^2\right) &= 0 \\ 2(y+1)\left(1-(y+1)^2-2x^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

נפשט ונקבל שאם $x=0$ אז

$$\begin{aligned} 2(y+1)\left(1-(y+1)^2\right) &= 0 \\ y+1 &= 0 \\ 1-(y+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

ומכאן נקבל ש־ $y=-1$ או

$$\begin{aligned}(y+1)^2 &= 1\\ y+1 &= \pm 1\\ y &= 0,-2.\end{aligned}$$

זאת אומרת, קיבלנו את הנקודות הסטציונריות $(0,-2)\,,(0,0)\,,(0,-1)$. אם $y=-1$ אז נקבל $x=0$ או

$$\begin{aligned}2-(-1+1)^2-2x^2 &= 0\\ 2-2x^2 &= 0\\ x &= \pm 1.\end{aligned}$$

לכן הנקודות הסטציונריות הנוספות הן $(1,-1)\,,(-1,-1)$.

2. כעת עלינו למצוא את הנגזרות השניות של הפונקציות.

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \left(4x-2x\left((y+1)^2+2x^2\right)\right)e^{-(y+1)^2-x^2},\\ f_y(x,y) &= \left(2(y+1)-2(y+1)\left((y+1)^2+2x^2\right)\right)e^{-(y+1)^2-x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y) &= \left(4-2(y+1)^2-12x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2}-2x\left(4x-2x(y+1)^2-4x^3\right)e^{-(y+1)^2-x^2}=\\ &= \left(4-2(y+1)^2-20x^2+4x^2(y+1)^2+8x^4\right)e^{-(y+1)^2-x^2}\\ f_{yy}(x,y) &= \left(2-6(y+1)^2-4x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2}+\left(-4(y+1)^2+4(y+1)^4+8(y+1)^2x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2}=\\ &= \left(2-10(y+1)^2-4x^2+4(y+1)^4+8(y+1)^2x^2\right)e^{-(y+1)^2-x^2}\\ f_{xy}(x,y) &= \left(-4x(y+1)+4x(y+1)^3+8(y+1)x^3\right)e^{-(y+1)^2-x^2}\end{aligned}$$

נציב את הנקודות ונקבל:

$$\begin{aligned}\Delta(0,0) &= f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=\\ &= 2e^{-1}\cdot(-4)\,e^{-1}-f_{xy}^2(0,0)<0\end{aligned}$$

ולכן נקודת אוכף.

$$\begin{aligned}\Delta(0,-1) &= f_{xx}(0,-1)\,f_{yy}(0,-1)-f_{xy}^2(0,-1)=\\ &= 4\cdot 2-0=8>0\end{aligned}$$

ולכן נקודת מינימום.

$$\begin{aligned}\Delta(0,-2) &= f_{xx}(0,-2)\,f_{yy}(0,-2)-f_{xy}^2(0,-2)=\\ &= 2e^{-1}\cdot(-4)\,e^{-1}-f_{xy}^2(0,-2)<0\end{aligned}$$

ולכן נקודת אוכף.

$$\Delta(1,-1) = f_{xx}(1,-1)\, f_{yy}(1,-1) - f_{xy}^2(1,-1) =$$
$$= (-8)\, e^{-1}\cdot(-2)\, e^{-1} - 0 > 0$$

ולכן נקודת מקסימום.

$$\Delta(-1,-1) = f_{xx}(-1,-1)\, f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) =$$
$$= (-12)\, e^{-1}\cdot(-2)\, e^{-1} - 0 > 0$$

ולכן נקודת מקסימום.

תרגיל 10.28 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. נתונה פונקציה $f(x)$ של משתנה אחד הגזירה ברציפות וכך שמתקיימים: $f(2) = 2,\ f'(2) = -2$ ו־ $f'(0) = 3$. נגדיר פונקציה של שני משתנים ע"י הנוסחה $g(x,y) = yf(x) + f\left(x^2 - y\right)$.

1. חשבו את $g_x'(2,4)$ ואת $g_y'(2,4)$.
2. מצאו וקטור כיוון שעבורו הנגזרת הכיוונית של $g(x,y)$ מתאפסת בנקודה $(2,4)$.

פתרון:

1. נתחיל בחישוב הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

$$\begin{aligned} g_x'(x,y) &= yf'(x) + f'\left(x^2 - y\right)(2x) \\ g_y'(x,y) &= f(x) + f'\left(x^2 - y\right)(-1). \end{aligned}$$

כעת נוכל להציב את הנקודות הרלוונטיות.

$$\begin{aligned} g_x'(2,4) &= 4f'(2) + f'(0)\cdot 4 = 4 \\ g_y'(2,4) &= f(2) + f'(0)(-1) = -1. \end{aligned}$$

2. צריך למצוא וקטור כיוון (a,b) כך ש־ $a\cdot 4 + b\cdot(-1) = 0$. נקבל ש־

$$\begin{aligned} b &= 4a \\ a^2 + b^2 &= 1 \end{aligned}$$

ולכן,

$$\begin{aligned} 17a^2 &= 1 \\ a &= \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \\ b &= \pm\frac{4}{\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

10.4 מבחן מועד מיוחד - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2014.

10.4.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 10.29 2 סעיפים, 24 נקודות סה"כ.

1. נתונה סדרה מונוטונית יורדת $\{a_n\}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס וכי סכומו המסומן על ידי S מקיים $0 < S < a_1$.
2. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2+1}$ מתכנס ותנו הערכה לסכומו.

פתרון: הסעיף הראשון נפתר בהתאם להוכחה שניתנה בכיתה. הפתרון לסעיף השני: נראה שמדובר בטור לייבניץ. נשים לב תחילה כי מדובר בסדרה של איברים חיוביים מאחר והמונה והמכנה הם חיובים לכל $n \geq 1$. נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$ היא מונוטונית יורתד ושואפת לאפס. נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} \quad \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0,$$

ובנוסף,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\left(x^2+1\right) - (2x-1)\,2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \\ &= \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \\ &= \frac{-2x^2+2x+2}{\left(x^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

נוכיח כי $-2x^2+2x+2 < 0$ לכל $x \geq 2$. מדובר בפרבולה עם נקודת מקסימום. בשלב זה ניתן לבצע חקירת פונקציה ולראות שנקודת המקסימום מתקבלת ב־$x_0 = \frac{1}{2}$ וכן כי עבור $x = 2$ הפרבולה מקבלת ערך שלילי ולכן לכל $x \geq 2$ הפונקציה הנ"ל היא שלילית ובהתאם לכך גם הפונקציה f יורדת בתחום המדובר. ניתן גם לחשב מפורשות את נקודות החיתוך עם הצירים בכדי להוכיח זאת. קיבלנו שהטור מהאיבר $n = 2$ והלאה הוא טור לייבניץ ולכן מתכנס. בפרט אנו יודעים שהסכום של הטור $S = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2+1}$ תחום על ידי $a_2 < S < 0$, זאת אומרת

$$\begin{aligned} (-1)^{2+1} \frac{2\cdot 2-1}{2^2+1} < \quad S \quad &< 0 \\ -\frac{3}{5} < \quad S \quad &< 0 \end{aligned}$$

ומכאן נובע ש־

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5} + a_1 \quad &< S + a_1 = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2+1} \quad < 0 + a_1 \\ -\frac{3}{5} + (-1)^{1+1} \frac{2-1}{1^2+1} \quad &< \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2+1} < \quad 0 + (-1)^{1+1} \frac{2-1}{1^2+1} \\ .-\frac{1}{10} \quad &< \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2+1} < \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

תרגיל 10.30 נסחו והוכיחו את מבחן האינטגרל לטורים חיוביים (24 נקודות).

פתרון: בהתאם להוכחה שניתנה בכיתה.

10.4.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות.

תרגיל 10.31 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ מתכנס.
2. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$ (רמז: מבחן האינטגרל). מה תוכלו להגיד לגבי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2^n)}{n\ln^2(n)}$.

פתרון:

1. זו שאלה שפחות או יותר זהה לשאלה שעשינו בתרגול כאשר דנו בטורים חיוביים מתכנסים. להלן ההוכחה שנתנו בתרגול עם עדכונים קטנים. נוכיח תחילה את הטענה הראשונה ונראה שהסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה ל-e. נוכיח זאת בכך שנראה כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{(n+2)\,n}{(n+1)\,(n+1)}\right)^n=\\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n=\\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n\geq\\
&\geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)=\\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1}\right)=\\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)=\\
&= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באי־שוויון ברנולי במהלך החישוב. על כן, הראנו כי הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה. כעת נבדוק לאן שואפת הסדרה $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$. נוכיח שהסדרה היא מונוטונית עולה ולכן $a_n \nrightarrow 0$ ובפרט, הטור לא מתכנס. צריך להראות ש־

$$a_{n+1} > a_n,$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

נחשב את היחס הנתון.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \\ &= \frac{3\left(n+1\right)n^n}{\left(n+1\right)^{n+1}} = \\ &= 3\frac{n^n}{\left(n+1\right)^n} = \\ &= 3\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

אנו יודעים כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ זה ביטוי מונוטוני עולה ל־e ולכן $3 > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, או לחילופין $\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$ ולכן הטענה נובעת.

2. זאת שאלה שענינו עליה בתרגול כאשר דנו במבחן האינטגרל. להלן הפתרון שנתנו בתרגול. נגדיר את הפונקציה $f\left(x\right) = \frac{1}{x\ln^2(x)}$ לכל $x \geq 2$. נשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק את התכנסות הטור הנ"ל. לשם כך נבדוק שהפונקציה עומדת בתנאים הרלוונטיים:

(א) הפונקציה רציפה בתור מנה של פונקציות רציפות והמכנה אינו מתאפס בשום שלב (תמיד חיובי).

(ב) הפונקציה מונוטונית יורדת ונראה זאת בעזרת הנגזרת:

$$\begin{aligned}f'\left(x\right) &= \left[\frac{1}{x\ln^2\left(x\right)}\right]' = \\ &= \frac{0-\ln^2\left(x\right) - x2\ln^1\left(x\right)\frac{1}{x}}{\left(x\ln^2\left(x\right)\right)^2} = \\ &= \frac{0-\ln^2\left(x\right)-2\ln\left(x\right)}{\left(x\ln^2\left(x\right)\right)^2} < 0\end{aligned}$$

לכל $x \geq 2$ ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת.

(ג) הפונקציה שווה לסדרה לכל $x \geq 2$, $x \in \mathbb{N}$.

לכן התנאים הבסיסיים למשפט מתקיימים. נבחן כעת מתי האינטגרל מתכנס. נפתור עבור p כללי. קרי, עבור $f\left(x\right) = \frac{1}{x\ln^p(x)}$ ולאחר מכן נציב $p=2$.

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^p(x)}dx =$$

$$\underset{y=\ln(x),\ dy=\frac{1}{x}dx}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^p}dy =$$

$$= \begin{cases} \lim_{b\to\infty}\left[\ln(y)\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} & p=1 \\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(y)^{1-p}}{1-p}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} & p\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\right] & p=1 \\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln(b))^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p}\right] & p\neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty & p=1 \\ -\frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p} & p>1 \\ \infty & p<1 \end{cases}$$

לכן קיבלנו שעבור $p \leq 1$ הטור לא מתכנס ואחרת הטור מתכנס. הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2^n)}{n\ln^2(n)}$ גם כן מתכנס מאחר ואם נבחן את הטור כאשר כל האיברים נלקחים בערכם המוחלט $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\cos(2^n)}{n\ln^2(n)}\right|$ אזי

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\cos(2^n)}{n\ln^2(n)}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)} < \infty$$

ומתכנס. זאת אומרת, הטור מתכנס בהחלט ולכן, בפרט, מתכנס.

תרגיל 10.32 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ. נתון טור החזקות $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n6^n}$

1. מהו תחום ההתכנסות של הטור הנ"ל?
2. מצאו נוסחה מפורשת ל־$f(x)$ בתחום ההתכנסות שמצאתם בסעיף א'.

פתרון:

1. נעזר במבחן השורש בכדי לחשב רדיוס התכנסות. לפני שנעשה זאת נגדיר $t = 3x-1$

ונמצא רדיוס התכנסות עבור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n6^n}$. לאחר מכן נמיר זאת חזרה למונחי x.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n6^n}\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=\\ &= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(n^{-\frac{1}{n}}\right)}=\\ &= \frac{1}{6}e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left(n^{-\frac{1}{n}}\right)}=\\ &= \frac{1}{6}e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{\ln(n)}{n}}=\\ &= \frac{1}{6}e^{0}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא $R=6$. נשים לב שהטור מתכנס לכל

$$\begin{aligned}-6< & \ 3x-1 & <6\\ -5< & \ 3x & <7\\ -\frac{5}{3}< & \ x & <\frac{7}{3}\end{aligned}.$$

נבדוק את הערכים בקצוות הקטע $\left[-\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right]$. עבור $x=\frac{7}{3}$, נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3\frac{7}{3}-1\right)^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7-1)^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

וזה טור הרמוני שמתבדר. עבור $x=-\frac{5}{3}$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\frac{5}{3}-1\right)^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{n6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

וזה טור לייבניץ, ובפרט מתכנס. מכאן שתחום ההתכנסות הוא $\left[-\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

2. נשתמש בנוסחה עבור טור של $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n6^n}=\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3x-1}{6}\right)^n}{n}=\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1-3x}{6}\right)^n}{n}=\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{1-3x}{6}\right)^n}{n}=\\ &= -\ln\left(1+\frac{1-3x}{6}\right)=\\ &= -\ln\left(\frac{7-3x}{6}\right).\end{aligned}$$

תרגיל 10.33 תהי $f(s,t)$ פונקציה של שני משתנים הגזירה ברציפות לפי כל אחד מהם. נניח כי המשוואה $f\left(\frac{x+y}{x+z},\frac{x+y}{y-z}\right)=0$ מתארת את $z=z(x,y)$ כפונקציה של x,y. הוכיחו כי $z'_x-z'_y=1$. ניתן להניח שהמכנים לא מתאפסים.

פתרון: נשים לב ש־ $f\left(\frac{x+y}{x+z(x,y)},\frac{x+y}{y-z(x,y)}\right)$ זו פונקציה קבועה ולכן הנגזרת שלה מתאפסת. נזכור כי לפי משפט שראינו מתקיים ש־

$$z'_y(x,y)=-\frac{f'_y\left(\frac{x+y}{x+z},\frac{x+y}{y-z}\right)}{f'_z\left(\frac{x+y}{x+z},\frac{x+y}{y-z}\right)}\quad;\quad z'_x(x,y)=-\frac{f'_x\left(\frac{x+y}{x+z},\frac{x+y}{y-z}\right)}{f'_z\left(\frac{x+y}{x+z},\frac{x+y}{y-z}\right)}.$$

בכדי לפשט את הסימונים נניח ש־ $s=\frac{x+y}{x+z}$ ו־ $t=\frac{x+y}{y-z}$. נציב את הנגזרות הרלוונטיות ונקבל ש־

$$\begin{aligned}
z'_x(x,y) &= -\frac{f'_x(s,t)}{f'_z(s,t)}= \\
&= -\frac{f'_s(s,t)\left(\frac{x+y}{x+z}\right)'_x+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{y-z}\right)'_x}{f'_s(s,t)\left(\frac{x+y}{x+z}\right)'_z+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{y-z}\right)'_z}= \\
&= -\frac{f'_s(s,t)\left(\frac{x+z-(x+y)}{(x+z)^2}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{1}{y-z}\right)}{f'_s(s,t)\left(\frac{-(x+y)}{(x+z)^2}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{(y-z)^2}\right)}= \\
&= -\frac{f'_s(s,t)\left(\frac{z-y}{(x+z)^2}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{1}{y-z}\right)}{f'_s(s,t)\left(\frac{-(x+y)}{(x+z)^2}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{(y-z)^2}\right)}
\end{aligned}$$

באופן דומה,

$$\begin{aligned}
z'_y(x,y) &= -\frac{f'_y(s,t)}{f'_y(s,t)}= \\
&= -\frac{f'_s(s,t)\left(\frac{x+y}{x+z}\right)'_y+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{y-z}\right)'_y}{f'_s(s,t)\left(\frac{x+y}{x+z}\right)'_z+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{y-z}\right)'_z}= \\
&= -\frac{f'_s(s,t)\left(\frac{1}{x+z}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{y-z-(x+y)}{(y-z)^2}\right)}{f'_s(s,t)\left(\frac{-(x+y)}{(x+z)^2}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{(y-z)^2}\right)}= \\
&= -\frac{f'_s(s,t)\left(\frac{1}{x+z}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{-z-x}{(y-z)^2}\right)}{f'_s(s,t)\left(\frac{-(x+y)}{(x+z)^2}\right)+f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{(y-z)^2}\right)}.
\end{aligned}$$

כעת נחסר בין התוצאות,

$$z'_x - z'_y = \frac{f'_s(s,t)\left(\frac{1}{x+z} - \frac{z-y}{(x+z)^2}\right) + f'_t(s,t)\left(\frac{-z-x}{(y-z)^2} - \frac{1}{y-z}\right)}{f'_s(s,t)\left(\frac{-(x+y)}{(x+z)^2}\right)' + f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{(y-z)^2}\right)} =$$

$$= \frac{f'_s(s,t)\left(\frac{x+y}{(x+z)^2}\right) + f'_t(s,t)\left(\frac{-x-y}{(y-z)^2}\right)}{f'_s(s,t)\left(\frac{-(x+y)}{(x+z)^2}\right)' + f'_t(s,t)\left(\frac{x+y}{(y-z)^2}\right)} = -1$$

תרגיל 10.34 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. מצאו ומיינו את כל הנקודות הסטציונריות של $f(x,y) = xy(6-2x-y)$.
2. חשבו את האינטגרל $\int x^2 \arcsin(x)\,dx$.

פתרון:

1. נצטרך תחילה למצוא נגזרות חלקיות מסדר ראשון.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy(6-2x-y) \\ f_x(x,y) &= y(6-2x-y) + xy(-2) = 6y - 4xy - y^2 \\ f_y(x,y) &= x(6-2x-y) + xy(-1) = 6x - 2x^2 - 2yx. \end{aligned}$$

נשווה לאפס ונקבל

$$\begin{aligned} y(6-4x-y) &= 0 \\ x(3-x-y) &= 0 \end{aligned}$$

נשים לב ש־ $x = 0$ ו־$y = 0$ מאפסים את המשוואות וכן גם $(0,6), (3,0)$. בנוסף, מתוך המשוואות הבאות

$$\begin{aligned} 6-4x-y &= 0 \\ 3-x-y &= 0 \end{aligned}$$

נקבל שגם $x = 1, y = 2$ מאפסים את המשוואות. על כן הנקודות הסטציונריות הן: $\{(3,0), (0,6), (0,0), (1,2)\}$. נמצא את הנגזרות החלקיות מסדר שני.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -4y \\ f_{yx}(x,y) &= 6-4x-2y \\ f_{yy}(x,y) &= -2x \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \Delta &= f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y) - f^2_{xy}(x,y) = 8xy - (6-4x-2y)^2 = \\ &= -36 + 48x + 24y - 16x^2 - 8xy - 4y^2 = \\ &= 4\left(-9 + 12x + 6y - 4x^2 - 2xy - y^2\right) \end{aligned}$$

נבדוק עבור הנקודות הנ"ל.

$$\begin{aligned}
\Delta(0,0) &= 4(-9+0) = -36 < 0 \\
\Delta(3,0) &= 4(-9+36+0-36-0) = -36 < 0 \\
\Delta(0,6) &= 4(-9+0+36-0-0-36) = -36 < 0 \\
\Delta(1,2) &= 4(-9+12+12-4-4-4) = 12 > 0
\end{aligned}$$

זאת אומרת, כל הנקודות הן נקודות אוכף, למעט הנקודה $(1,2)$שהיא נקודת מקסימום מקומי.

2. נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים והחלפת משתנים.

$$\begin{aligned}
\int x^2\arcsin(x)\,dx &= \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&\underset{\sqrt{1-x^2}=t,\ dt=-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{=} \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{3}\int\left(1-t^2\right)dt = \\
&= \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C = \\
&= \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{1-x^2}{3}\right)+C = \\
&= \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+C
\end{aligned}$$

תרגיל 10.35 19 נקודות סה"כ. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$. מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה $\left(\sqrt{2},1\right)$ ובכיוון המשיק לאליפסה $2x^2+y^2=5$ בנקודה זו.

פתרון: נרצה למצוא תחילה את הכיוון המשיק לעקומה הנתונה בנקודה $\left(\sqrt{2},1\right)$. העקומה $g(x,y(x))=2x^2+y^2-5=0$ נותנת לנו את למעשה קו גובה כלשהו. נמצא את המשיק בנקודה $\left(\sqrt{2},1\right)$. נשים לב שהעקומה עוברת בנקודה ולכן אם $x=\sqrt{2}$ אז $y=1$.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{g_x(x,y(x))}{g_y(x,y(x))} = \\
&= -\frac{4x}{2y} \\
y'\left(\sqrt{2}\right) &= -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

קיבלנו את שיפוע הקו המשיק לעקומה בנקודה, כעת נמצא את וקטור הכיוון בנקודה הזאת בעזרת נרמול. נזכור כי הכיוון הוא

$$(x,y)=\left(1,-2\sqrt{2}\right)$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
\left(-2\sqrt{2}\right)^2+1^2 &= 8+1= \\
&=9 \\
\sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2+1^2} &= 3 \\
&\Rightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).
\end{aligned}
$$

זאת אומרת, וקטור הכיוון הוא $\vec{v}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. נשתמש בנוסחה עבור נגזרת כיוונית בנקודה. $f(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}} \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}
\end{aligned}
$$

לכן,

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{v}}(f)\left(\sqrt{2},1\right) &= \frac{1}{3}\cdot f_x\left(\sqrt{2},1\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot f_y\left(\sqrt{2},1\right)= \\
&=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2-1}}\right) \\
&=-\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{5}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

תרגיל 10.36 2 סעיפים, 19 נקודות סה"כ.

1. חשבו את האינטגרל $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$.
2. קבעו האם הגבול הבא קיים ב־$(0,0)$,

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin(y)+y\sin(x)}{x^2+y^2}
$$

פתרון:

1. פתרנו תרגיל דומה בתרגיל בית 1. נשים לב שבגבול כאשר $x \to 0$ פונקצית הלוגריתם שואפת לאינסוף (אינטגרל לא אמיתי). לעומת זאת, אנו יודעים (וצריך שוב לחשב ולהראות) ש־ $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. בכל מקרה, נחשב את הגבול לאחר חישוב האינטגרל בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln(x)\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x\ln(x)\,dx = \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right] = \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_a^1 = \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{1^2}{4} - \frac{a^2}{2}\ln(a) + \frac{a^2}{4}\right] = \\
&= -\frac{1}{4} - \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{a^2}{4}\right] = \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

וזאת מאחר ו־

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+} a^2\ln(a) &= \lim_{a\to 0^+}\frac{\ln(a)}{\frac{1}{a^2}} = \\
&\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{a\to 0^+}\frac{\frac{1}{a}}{\frac{-2}{a^3}} = \\
&= \lim_{a\to 0^+}\frac{a^2}{-2} = 0
\end{aligned}$$

2. הגבול לא קיים וקל לראות זאת כאשר בוחרים שני אופנים בהם הנקודה (x,y) שואפת ל־$(0,0)$. לדוגמא: כאשר $y=0$ ו־$x\to 0$ אזי,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin(y)+y\sin(x)}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(0)+0\cdot\sin(x)}{x^2+0^2} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0^2} = 0.
\end{aligned}$$

לעומת זאת, אם $y=x$, אזי

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin(y)+y\sin(x)}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(x)+x\cdot\sin(x)}{x^2+x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin(x)}{2x}\right] = \\
&= 0+\frac{1}{2}\neq 0
\end{aligned}$$

בשונה ממה שקיבלנו קודם לכן ולכן הגבול לא קיים.

10.5 מבחן מועד מיוחד מאוד - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2015.

10.5.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 10.37

1. נתונה סדרה מונוטונית יורדת $\{a_n\}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור מתכנס וכי סכומו המסומן ב־S מקיים $0 < S < a_1$.
2. הוכיחו כי הטור הבא מתכנס בתנאי ותנו הערכה לסכומו. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+2)}{n}$ מתכנס ותנו הערכה לסכומו.

פתרון:

1. ראו הוכחה רלוונטית במחברת הקורס (טור לייבניץ).
2. נוכיח כי מדובר בטור לייבניץ. נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$ ונשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} \left[„\frac{\infty}{\infty}” \right] \stackrel{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(x+2)}}{1} = 0,$$

לכן הסדרה המרכיבה את הטור שואפת לאפס. בנוסף,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+2}x - \ln(x+2)}{x^2} = \\ &= \frac{x - (x+2)\ln(x+2)}{(x+2)x^2} < 0 \end{aligned}$$

עבור כל $x \geq 1$, זה נובע ישירות מכך ש־ $\ln(x+2) > 1$ ו־$x + 2 > x$ לכל $x \geq 1$.
לכן הסדרה הנתונה בטור היא מונוטונית יורדת והתנאים של טור לייבניץ מתקיימים.
לפי סעיף א' אנו יודעים כי סכום הטור S חסום בין 0 ל־ $a_1 = \ln(3)$.

תרגיל 10.38 נסחו והוכיחו את מבחן השורש לטורים חיוביים.

פתרון: ראו הוכחה רלוונטית במחברת הקורס.

10.5.2 חלק ב'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מתוך 6 השאלות הבאות.

תרגיל 10.39

1. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^n}{n!}$ מתכנס.
2. חשבו את ערך הטור הטלסקופי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$.

פתרון:

1. נשתמש במבחן המנה.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n n^n}{n!}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{2^n n^n (n+1)} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^n}{n^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2e > 1
\end{aligned}$$

ולכן הטור מתבדר.

2. נפצל את הביטוי הנתון בטור לשני שברים.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+2)(n+4)} &= \frac{A}{(n+2)} + \frac{B}{(n+4)} = \\
&= \frac{An+4A+Bn+2B}{(n+2)(n+4)} = \\
&= \frac{(A+B)n+4A+2B}{(n+2)(n+4)} \\
&\Rightarrow A = -B \\
&\quad 4A+2B = 1 \\
&\Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+4)}\right] = \\
&= \frac{1}{2(1+2)} + \frac{1}{2(2+2)} = \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}.
\end{aligned}$$

שימו לב שטור הוא טור טלסקופי, אבל נותרו שני האיברים הראשונים ולא רק האיבר הראשון כמו בד"כ. האיברים הללו נותרו מאחר ואין איברים מתאימים שיקזזו עם סימן שלילי (עבור $n = 1, 2$).

תרגיל 10.40 נתון טור החזקות $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2x)^{2n}}{n\cdot 2^n}$.

1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

2. מצאו נוסחה מפורשת ל־$f'(x)$ בתחום ההתכנסות שמצאתם בסעיף הקודם.

פתרון:

1. נבצע החלפת משתנים $t = (1+2x)^2$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} t^n$. נשתמש במבחן המנה.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}} = $$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R=2$. נבדוק התכנסות ב־$t=\pm 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$$

כאשר הטור הראשון מתבדר כטור הרמוני והשני מתכנס בטור טור לייבניץ. נעביר חזרה למונחי x.

$$\begin{aligned} -2 \leq & \quad t & < 2 \\ -2 \leq & \quad (1+2x)^2 & < 2 \\ 0 \leq & \quad (1+2x)^2 & < 2 \\ -\sqrt{2} < & \quad 1+2x & < \sqrt{2} \\ \frac{-\sqrt{2}-1}{2} < & \quad x & < \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{aligned}$$

לסיכום, תחום ההתכנסות הוא $\left(\frac{-\sqrt{2}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

2. נגזור את הטור איבר־איבר,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2x)^{2n}}{n\cdot 2^n}$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1+2x)^{2n-1}2}{n\cdot 2^n} =$$
$$= \frac{4}{1+2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2x)^{2n}}{2^n} =$$
$$= \frac{4}{1+2x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1+2x)^2}{2}\right)^n =$$
$$= \frac{4}{1+2x} \left[\frac{1}{1-\frac{(1+2x)^2}{2}} - 1\right]$$

כאשר במעבר האחרון התייחסנו לטור כמו לטור גיאומטרי, ללא האיבר הראשון ולכן גם החיסור של האיבר הראשון $a_0 = 1$. נפשט את הביטוי ונקבל

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{1+2x}\left[\frac{2}{2-(1+2x)^2}-1\right] = \\ &= \frac{4}{1+2x}\left[\frac{(1+2x)^2}{2-(1+2x)^2}\right] = \\ &= \frac{4(1+2x)}{2-(1+2x)^2}. \end{aligned}$$

תרגיל 10.41 תהיי $f(x,y)$ פונקציה בשני משתנים הנתונה על ידי הנוסחה

$$.f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+\sin(y)}{x^2+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. קבעו באילו נקודה הפונקציה $f(x,y)$ רציפה?
2. קבעו באילו נקודות f_x, f_y' קיימות ומצאו נוסחה עבורן.

פתרון:

1. בכל המישור למעט בראשית הצירים הפונקציה מוגדרת על ידי מנה של פונקציות כאשר גם במונה וגם במכנה ישנם פונקציות רציפות (אריתמטיקה של פונקציות רציפות) והמכנה לא מתאפס ולכן הפונקציה רציפה בתחום זה. נעבור לדון בראשית הצירים. נחשב את הגבול לאורך העקומה $y(x) = x$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sin(y)}{x^2+|y|} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2+|x|} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{\sin(x)}{x}}{x+\frac{|x|}{x}}. \end{aligned}$$

נשים לב שהמונה שואף ל־$\lim_{x\to 0} x + \frac{\sin(x)}{x} = 0+1 = 1$. בעוד המכנה מקיים את הגבולות הבאים

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} x + \frac{|x|}{x} &= 0+1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} x + \frac{|x|}{x} &= 0-1 = -1 \end{aligned}$$

לכן הגבול לא קיים מאחר ואם $x \to 0^+$ אז הגבול הוא $\frac{1}{1} = 1$ וכאשר $x \to 0^-$ הגבול הוא $\frac{1}{-1} = -1$. על כן הפונקציה איננה רציפה בראשית.

2. נחלק למקרים. נבחן תחילה את הנגזרת f'_x.

(א) אם $y=0$ אז מדובר בפונקציה הקבועה $f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1$ ולכן זו פונקציה גזירה כאשר $x\neq 0$ והנגזרת שלה היא 0. נבדוק את הנגזרת בנקודה $(0,0)$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=\pm\infty,$$

לכן הנגזרת לא קיימת בנקודה זו.

(ב) אם $y\neq 0$, אז הפונקציה שלנו גזירה לפי x בתור מנה של פונקציות גזירות לפי x והנוסחה עבורה היא

$$f'_x(x,y)=\frac{2x\left(x^2+|y|\right)-2x\left(x^2+\sin(y)\right)}{\left(x^2+|y|\right)^2}.$$

נעבור לדון בנגזרת לפי y.

(ג) אם $x=0$, אזי יש לנו את הפונקציה $f(0,y)=\frac{\sin(y)}{|y|}$. הפונקציות הללו גזירות כאשר $y\neq 0$ לכן נבדוק עבור $y=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h)}{|h|}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{\sin(h)}{h}=\infty$$

ולכן הפונקציה לא גזירה בנקודה $(0,0)$. נמצא את הנוסחה לנקודות בהן הפונקציה גזירה

$$f'_y(0,y)=\frac{|y|\cos(y)-(\pm 1)\cdot\sin(y)}{|y|^2}$$

כאשר הסימן נקבע על פי הסימן של y.

(ד) אם $x\neq 0$, אזי הפונקציה מורכבת מפונקציות גזירות בכל נקודה למעט $y=0$ (ניתן להשתמש באריתמטיקה של פונקציות גזירות כאשר $y\neq 0$). נבדוק מה קורה כאשר $y=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+\sin(h)}{x^2+|h|}-\frac{x^2+\sin(0)}{x^2+|0|}}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+\sin(h)}{x^2+|h|}-1}{h}=\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-|h|}{h\left(x^2+|h|\right)}=\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(h)}{h\left(x^2+|h|\right)}-\frac{|h|}{h\left(x^2+|h|\right)}\right].\end{aligned}$$

נשים לב הביטוי הראשון מתכנס ל- $\frac{1}{x^2}$ ואילו הביטוי השני מתכנס ל- $\pm\frac{1}{x^2}$ בהתאם לכיוון השאיפה לאפס ולכן גם הגבול הזה אינו קיים.

תרגיל 10.42

1. מצאו את כל הנקודות הסטציונריות של $f(x,y)=xy\left(6+4x+\frac{1}{2}y\right)$ ומיינו אותן.
2. חשבו את האינטגרל $\int x^2\arccos(x)\,dx$.

פתרון:

1. נמצא תחילה את הגרדיאנט של הפונקציה.

$$f(x,y)=6xy+4x^2y+\frac{1}{2}xy^2$$
$$f'_x(x,y)=6y+8xy+\frac{1}{2}y^2=0$$
$$f'_y(x,y)=6x+4x^2+xy=0$$

נשים לב שפתרון אחד שקיים לצמד המשוואות הוא $(0,0)$. בנוסף, אם $x=0$ אז המשוואה השנייה מתקיימת והראשונה שווה ל־

$$6y+\frac{1}{2}y^2=0$$
$$y=-12$$

לכן נקודה נוספת היא $(0,-12)$. אם $y=0$ אזי המשוואה הראשונה מתקיימת והשנייה שווה ל־

$$6x+4x^2=0$$
$$x=-\frac{3}{2}$$

לכן פתרון נוסף הוא $\left(-\frac{3}{2},0\right)$. כעת נוכל להניח ש־$x,y\neq 0$. על כן מערכת המשוואות היא

$$6+8x+\frac{1}{2}y=0$$
$$6+4x+y=0$$

מפתרונם נקבל את הנקודה $\left(-\frac{1}{2},-4\right)$. לסיכום, קיבלנו 4 נקודות סטציונריות. נמצא נגזרות שניות.

$$f''_{xx}(x,y)=8y$$
$$f''_{xy}(x,y)=6+8x+y$$
$$f''_{yy}(x,y)=x$$

נמיין את הנקודות שמצאנו.

$$\Delta(0,0)=0\cdot 0-36<0$$

לכן $(0,0)$זו נקודת אוכף.

$$\Delta(0,-12)=0-(6-12)^2<0$$

לכן $(0,-12)$ זו נקודת אוכף.

$$\Delta\left(-\frac{3}{2},0\right)=0-\left(6+8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2<0$$

לכן $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ זו נקודת אוכף.

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},-4\right)=(-32)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-(6-4-4)^2=16-4>0$$

ולכן $\left(-\frac{1}{2},-4\right)$ זו נקודת מקסימום מקומית.

2. נחשב את האינטגרל $\int x^2\arccos(x)\,dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned}\int x^2\arccos(x)\,dx &= \frac{x^3}{x}\arccos(x)+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\\ &\underset{1-x^2=t,\ dt=-2xdx}{=} \frac{x^3}{x}\arccos(x)-\frac{1}{6}\int\frac{1-t}{\sqrt{t}}dt=\\ &= \frac{x^3}{x}\arccos(x)-\frac{1}{6}\int t^{-\frac{1}{2}}dt+\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\\ &= \frac{x^3}{x}\arccos(x)-\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\\ &= \frac{x^3}{x}\arccos(x)-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}+\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{9}.\end{aligned}$$

תרגיל 10.43 נתונה הפונקציה $f(x,y)=\arctan\left(1+\frac{y}{x}\right)$. מצאו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה $(1,0)$ ובכיוון המשיק בנקודה זו למעגל $x^2+y^2=1$ (שונה מ־16 בכדי שנקודת ההשקה אכן תהיה על המעגל).

פתרון: נמצא את המשיק למעגל בנקודה $(1,0)$. נשים לב שבנקודה זו המשיק הוא למעשה אנכי, קרי מקביל לציר ה־y ולכן כיוון המשיק הוא $(0,1)$. נמצא את הנגזרת בכיוון ציר y בנקודה $(1,0)$.

$$\begin{aligned}f'_y(x,y)&=\frac{1}{1+1+\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\\ &=\frac{1}{2x+y},\\ f'_y(1,0)&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

תרגיל 10.44

1. הוכיחו בעזרת הגדרת האינטגרביליות כי הפונקציה $f(x) = x$ היא אינטגרבילית בקטע $[1,4]$.

2. חשבו את האינטגרל הבא: $\int \frac{x+1}{x^2-x+3}dx$

פתרון:

1. נוכיח זאת למקרה כללי של הקטע $[a,b]$. נזכיר שהגדרת האינטגרביליות אומרת שפונקציה היא אינטגרבילית אם הסכום העליון והסכום התחתון שווים. נרשום כל סכום בנפרד. סכום שטחי המלבנים התחתונים נתון על ידי

$$
\begin{aligned}
\underline{S_n} &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot h = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \\
&= \frac{b-a}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (na + i(b-a)) = \\
&= \left[\frac{b-a}{n^2}\right] \left[\sum_{i=0}^{n-1} na + (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} i\right] = \\
&= \left[\frac{b-a}{n^2}\right] \left[n^2 a + (b-a)\frac{n(n-1)}{2}\right] = \\
&= \left[\frac{b-a}{n^2}\right] \left[\frac{2n^2 a + (b-a)n(n-1)}{2}\right] = \\
&= \left[\frac{b-a}{n}\right] \left[\frac{a(n+1) + b(n-1)}{2}\right] = \\
&= \frac{ab(n+1) + b^2(n-1) - a^2(n+1) - ab(n-1)}{2n} = \\
&= \frac{2ab + b^2(n-1) - a^2(n+1)}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}
$$

ואת סכום שטחי המלבנים העליונים נקבל על ידי

$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot h = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i+1}{n}(b-a)\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) =$$
$$= \frac{b-a}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (na + (i+1)(b-a)) =$$
$$= \left[\frac{b-a}{n^2}\right] \left[\sum_{i=0}^{n-1} na + (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\right] =$$
$$= \left[\frac{b-a}{n^2}\right] \left[n^2 a + (b-a) \frac{n(n+1)}{2}\right] =$$
$$= \left[\frac{b-a}{n^2}\right] \left[\frac{2n^2 a + (b-a) n (n+1)}{2}\right] =$$
$$= \left[\frac{b-a}{n}\right] \left[\frac{a(n-1) + b(n+1)}{2}\right] =$$
$$= \frac{ab(n-1) + b^2(n+1) - a^2(n-1) - ab(n+1)}{2n} =$$
$$= \frac{-2ab + b^2(n+1) - a^2(n-1)}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

כאשר נציב $a = 1, b = 4$ נקבל שהגבול של הסכומים שווה ל-$\frac{15}{2} = \frac{4^2-1^2}{2}$ שזה בדיוק מה שהיינו מצפים לקבל מהאינטגרל על x בקטע.

2. נבצע חישוב ישיר.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-x+3}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-x+3}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+3}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2-x+3}dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+3\right| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{11}{4}}dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+3\right| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+3\right| + \frac{6}{11}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{11}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dx = \\
&\underset{y=\sqrt{\frac{4}{11}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{=} \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+3\right| + \frac{6}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{4}}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+3\right| + \frac{3}{\sqrt{11}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{11}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C =
\end{aligned}$$

10.6 מבחן מועד א' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2015.

10.6.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 10.45

1. הוכיחו את נוסחת השארית לפי לגרנז'. יש לציין מהם תנאי המשפט שאתם מוכיחים.
2. תהי f פונקציה הגזירה אינסוף פעמים בכל נקודה על הישר, כך ש־$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq |f(x)|$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי $f(x) = T_f(x)$ כאשר $T_f(x)$ זה טור הטיילור של f סביב $x_0 = 0$.

פתרון:

1. תחילה ננסח את המשפט. תהי f פונקציה גזירה $N+1$ פעמים בקטע $[x_0, x]$. אזי קיימת נקודה $c \in [x_0, x]$ שעבורה

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}.$$

באופן דומה ניתן לנסח את המשפט עבור הקטע $[x, x_0]$. נבחר K כך ש־

$$f(x) = T_N(x) + K(x-x_0)^{N+1}.$$

נגדיר פונקציה

$$F(t) = f(t) - T_N(t) - K(t-x_0)^{N+1}.$$

נשים לב כי כל הנגזרות מסדרים 0 עד N של הפונקציה $f(t)$ ושל הפולינום $T_N(t)$ בנקודה $t = x_0$ שוות זו לזו (נובע באופן ישיר מהגדרת פולינום טיילור סביב הנקודה x_0). לכן מתקיים,

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t)|_{t=x_0} &= f^{(n)}(x_0) - T_N^{(n)}(x_0) - K(N+1)N\cdots(N+1-n+1)(x_0-x_0)^{N+1-n} = \\ &= f^{(n)}(x_0) - T_N^{(n)}(x_0) - 0 = 0 \end{aligned}$$

עבור כל $0 \leq n \leq N$. על כן כל הנגזרות של הפונקציה F עד סדר N מתאפסות בנקודה x_0. כעת, נבחן את ערך הפונקציה F בנקודה x.

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - T_N(x) - K(x-x_0)^{N+1} = \\ &= f(x) - T_N(x) - \frac{f(x) - T_N(x)}{(x-x_0)^{N+1}}(x-x_0)^{N+1} = \\ &= f(x) - T_N(x) - f(x) + T_N(x) = 0 \end{aligned}$$

כאשר המעבר בין השורה הראשונה לשנייה נובע מהצבת K לפי הגדרה. לכן קיבלנו ש־$F(x) = F(x_0) = 0$, ולפי משפט רול נובע שקיימת נקודה $x_1 \in (x_0, x)$ כך

ש־ $0 = F'(x_1)$. אבל כעת נוכל להפעיל את משפט רול על הפונקציה F' כי $F'(x_0) = 0 = F'(x_1)$ ולכן קיימת נקודה $x_2 \in (x_0, x_1)$ כך ש־ $F''(x_2) = 0$. נמשיך כך באופן אינדוקטיבי עד שנקבל שקיימת נקודה $x_{N+1} \in (x_0, x_N)$ כך ש־ $F^{(N+1)}(x_{N+1}) = 0$. נחשב את הביטוי לנגזרת האחרונה.

$$F^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) - 0 - K \cdot (N+1)!$$

כאשר הנגזרת ה־$N+1$ של הפולינום מסדר N היא אפס. לכן

$$F^{(N+1)}(x_{N+1}) = 0 = f^{(N+1)}(x_{N+1}) - 0 - K \cdot (N+1)!$$
$$\Rightarrow K = \frac{f^{(N+1)}(x_{N+1})}{(N+1)!}.$$

לסיכום, בעזרת $F(x) = 0$ נקבל

$$f(x) - T_N(x) - K(x - x_0)^{N+1} = 0$$
$$f(x) - T_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_{N+1})}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

כנדרש.

2. נשים לב שנתון שכל הנגזרות חסומות. נשתמש בנוסחת השארית לפי לגראנג'.

$$\lim_{N\to\infty} |R_N(x)| = \lim_{N\to\infty} \left| \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-0)^{N+1} \right| \le$$
$$\le \lim_{N\to\infty} \left| \frac{f(c)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| =$$
$$= \lim_{N\to\infty} |f(c)| \left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right|.$$

אנו יודעים כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל x ולכן האיבר הכללי תמיד שואף לאפס. מכאן נובע שהגבול שלנו שואף לאפס ולכן הפונקציה שווה לטור טיילור שלה בנקודה x.

תרגיל 10.46

1. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ טור לייבניץ, הוכיחו כי הטור מתכנס לערך S ומתקיים

$$a_1 - a_2 \le S \le a_1.$$

2. הוכיחו כי הטור הבא מתכנס בתנאי ותנו חסמים לסכום $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n^2+1}$.

פתרון:

1. נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים של הטור. נתחיל עם סדרת הסכומים החלקיים בעלי מספר זוגי של איברים.

$$\begin{aligned} S_{2N} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots = \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots \geq \\ &\geq (a_1 - a_2) + 0 + 0 + \cdots \geq (a_1 - a_2) \end{aligned}$$

כאשר האי־שיוויון נובע מכך שכל האיברים בסוגריים הם חיוביים (a_n סדרה מונוטונית יורדת). נשים לב שזו סדרת סכומים מונוטונית עולה, מאחר ו־

$$S_{2N+2} = S_{2N} + a_{2N+1} - a_{2N+2} \geq S_{2N}.$$

בנוסף, זו סדרה חסומה, כי

$$\begin{aligned} S_{2N} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots \leq \\ &\leq a_1 - 0 - 0 - \cdots \leq a_1 \end{aligned}$$

ולכן הסדרה $(S_{2N})_{N\geq 1}$ זו סדרה מונוטונית עולה וחסומה ובפרט מתכנסת. נסמן $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = S$. אם נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים בעלי מספר אי־זוגי של איברים נקבל

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} &= \lim_{N\to\infty} S_{2N} + a_{2N+1} = \\ &= S + 0 \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מאריתמיקה של גבולות והעובדה שהסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ שואפת לאפס. לכן קיבלנו ש־ $(S_N)_{N\geq 1}$ מתכנסת ואם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת, כך גם הטור. נוכיח את החלק השני של השאלה. כבר הראנו כי

$$a_1 - a_2 \leq S_{2N} \leq a_1$$

לכל N ולכן בפרט זה נכון בגבול. משמע

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

כנדרש.

2. נוכיח תחילה שהטור לא מתכנס בהחלט. נשתמש במבחן השוואה גבולי עם הטור ההרמוני שמתבדר.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2n-1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n}{n^2+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2 \end{aligned}$$

לכן הטורים מתבדרים יחד. כעת נוכיח שמדובר בטור לייבניץ. נישם לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 0$$

ולכן הסדרה שואפת באפס. בנוסף,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2+1}}{\frac{2n-1}{n^2+1}} = \\
&= \frac{(2n+1)\left(n^2+1\right)}{(2n-1)\left((n+1)^2+1\right)} = \\
&= \frac{2n^3+n^2+2n+1}{2n^3+3n^2+2n-2} = \\
&= \frac{2n^3+n^2+2n+1}{2n^3+n^2+2n+2\left(n^2-1\right)}
\end{aligned}$$

נשים לב שעבור $n=1$ נקבל שהביטוי האחרון גדול מ־1 ולכן $a_2 > a_1$, אך עבור כל $n \geq 2$ נקבל שהשבר קטן מ־1 כי $2\left(n^2-1\right) > 1$ ולכן הסדרה שמתחילה ב־$n=2$ היא מונוטונית יורדת. לכן נסתכל על הטור מהאיבר השני והלאה ונקבל טור לייבניץ שמתכנס. הטור הזה חסום בין

$$-a_2 = -\frac{3}{5}$$

לבין

$$.-a_2+a_3 = -\frac{3}{5}+\frac{5}{10} = \frac{-1}{10}$$

נוסיף לשני החסמים את האיבר הראשון ונקבל ש־S חסום בין $-\frac{3}{5}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$ לבין $.-\frac{1}{10}+\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

הטעות הנפוצה ביותר במקרה זה הייתה התייחסות לטורו כולו כאילו היה טור לייבניץ, למרות שזה לא נכון ולכן השימוש במשפט על טור לייבניץ עבור a_1 ו־$a_1 - a_2$ איננו מתאים במקרה זה. עוד טעות שחזרה על עצמה במקומות שונים במבחן הייתה גזירה של סדרות דומיהן. צריך לזכור שאין כזה דבר נגזרת של סדרה מאחר וסדרה איננה פונקציה. סדרה זה אוסף של מספרים והגדרת הנגזרת שאנו מכירים לא תקפה לגביו.

10.6.2 חלק ב'

יש לענות על 2 שאלות בדיוק מבין 3 השאלות הבאות.

תרגיל 10.47 ענו על שלושת הסעיפים הבאים.

1. חשבו את האינטגרל הלא מסויים הבא $.\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}}dx$
2. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ מתכנס.
3. קבעו האם הטור הבא מתכנס - $.\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\cdot 2^n)}{n\ln^2(n)}$

פתרון:

1. נבצע החלפת משתנים $t=\sqrt{x}$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x+2\sqrt{x}}dx&=\int\frac{1}{t^2+2t}2tdt=\\&=\int\frac{2}{t+2}dt=\\&=2\ln|t+2|+C=\\&=2\ln\left|\sqrt{x}+2\right|+C\end{aligned}$$

2. זאת שאלה שענינו עליה בתרגול / בשיעור כאשר דנו במבחן האינטגרל. להלן הפתרון שניתן אז. נגדיר את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln^2(x)}$ לכל $x\geq 2$. נשתמש במבחן האינטגרל בכדי לבדוק את התכנסות הטור הנ"ל. לשם כך נבדוק שהפונקציה עומדת בתנאים הרלוונטיים:

(א) הפונקציה רציפה בתור מנה של פונקציות רציפות והמכנה אינו מתאפס בשום שלב (תמיד חיובי).

(ב) הפונקציה מונוטונית יורדת ונראה זאת בעזרת הנגזרת:

$$\begin{aligned}f'(x)&=&\left[\frac{1}{x\ln^2(x)}\right]'=\\&=&\frac{0-\ln^2(x)-x2\ln^1(x)\frac{1}{x}}{\left(x\ln^2(x)\right)^2}=\\&=&\frac{0-\ln^2(x)-2\ln(x)}{\left(x\ln^2(x)\right)^2}<0\end{aligned}$$

לכל $x\geq 2$ ולכן הפונקציה מונוטונית יורדת.

(ג) הפונקציה שווה לסדרה לכל $x\geq 2$, $x\in\mathbb{N}$.

לכן התנאים הבסיסיים למשפט מתקיימים. נבחן כעת מתי האינטגרל מתכנס. נפתור עבור p כללי. קרי, עבור $f(x)=\frac{1}{x\ln^p(x)}$ ולאחר מכן נציב $p=2$.

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x\ln^{p}(x)}dx = \\
&\underset{y=\ln(x),\ dy=\frac{1}{x}dx}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(2)}^{\ln(b)}\frac{1}{y^{p}}dy = \\
&= \begin{cases}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(y)\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} & p=1\\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(y)^{1-p}}{1-p}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} & p\neq 1\end{cases}\\
&= \begin{cases}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(b))-\ln(\ln(2))\right] & p=1\\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln(b))^{1-p}}{1-p}-\frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p}\right] & p\neq 1\end{cases}\\
&= \begin{cases}\infty & p=1\\ -\frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p} & p>1\\ \infty & p\leq 1\end{cases}
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו שעבור $p \leq 1$ הטור לא מתכנס ואחרת הטור מתכנס. בפרט במקרה הנתון, הטור מתכנס.

3. נראה שהטור מתכנס בהחלט.

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{\sin(n\cdot 2^{n})}{n\ln^{2}(n)}\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{1}{n\ln^{2}(n)}\right| = \\
&= \frac{1}{n\ln^{2}(n)}
\end{aligned}$$

וראינו בסעיף הקודם שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}(n)}$ מתכנס. לכן גם הטור הנוכחי מתכנס בהחלט לפי משפט השוואה לטורים חיובים ובפרט הטור מתכנס.
טעות שחזרה על עצמה כעת כי התייחסות לטור הנתון בסעיף כטור חיובי ושימוש במשפט השוואה עבורו. משפטי ההשוואה תקפים רק עבור טורים חיובים ולכן חייבסי להשתמש בסעיף זה בהתכנסות בהחלט.

תרגיל 10.48 נתון הטור הבא : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^{n}}{n\cdot 6^{n}}$. ענו על כל הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור.
2. מצאו נוסחה מפורשת ל־$f(x)$ בתחום ההתכנסות שמצאתם בסעיף א'.
3. הסתמכו על הסעיפים הקודמים כדי לחשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n}}$.

פתרון:

1. נבצע החלפת משתנה $t = 3x - 1$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 6^n} t^n$. נשתמש במבחן המנה.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)6^{n+1}}}{\frac{1}{n6^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\,6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{6}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא $R = 6$ עבור הטור לאחר החלפת המשתנה. הייתה טעות שחזרה על עצמה והיא ביצוע מבחן מנה ומבחן שורש עבור כל הביטוי שרשום בתוך הטור ולא רק עבור המקדמים. צריך לזכור שהוכחנו את מבחן השורש ומבחן המנה אך ורק עבור המקדמים של טור חזקות, ולכן אי אפשר להשתמש בהם בשום צורה אחרת, אפילו אם התוצאה לבסוף יוצאת נכונה.
עבור $t = 6$ נקבל את הטור ההרמוני המתבדר ועבור $t = -6$ נקבל טור לייבניץ מתכנס (הוכיחו זאת!). נעביר את הפתרון למונחי x.

$$\begin{aligned} -6 \leq & t < 6 \\ -6 \leq & 3x - 1 < 6 \\ -\frac{5}{3} \leq & x < \frac{7}{3} \end{aligned}$$

וזה תחום ההתכנסות של הטור הנתון.

2. נבצע מספר מעברים אלגבריים.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n\cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3x-1}{6}\right)^n = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{1-3x}{6}\right)^n \end{aligned}$$

קיבלנו בדיוק טור מהצורה של $-\ln(t+1)$ כאשר $t = \frac{1-3x}{6}$, לכן

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln\left(\frac{1-3x}{6} + 1\right) = \\ &= -\ln\left(\frac{7-3x}{6}\right) \end{aligned}$$

3. בכדי לחשב את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$ ניקח את הטור מסעיף א' ונציב $3x - 1 = 2$, זאת אומרת $x = 1$ ונקבל

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-1)^n}{n\cdot 6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

ומצד שני, לפי סעיף ב' ידוע כי

$$f(1) = -\ln\left(\frac{4}{6}\right) = \ln(1.5).$$

תרגיל 10.49 נתונה הפונקציה הבאה:

$$.f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ענו על כל הסעיפים הבאים:

1. מצאו נוסחה עבור $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ בכל נקודה במישור כולל הראשית.
2. קבעו האם $f'_x(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$.

פתרון:

1. בכל נקודה שאיננה ראשית הצירים נוכל לבצע גזירה מפורשות לפי אריתמטיקה של פונקציות גזירות ולקבל

$$\begin{aligned}f'_x(x,y)&=\frac{y\sqrt{x^2+y^4}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^4}}}{x^2+y^4}=\\&=\frac{yx^2+y^5-x^2y}{\left(x^2+y^4\right)^{1.5}}=\frac{y^5}{\left(x^2+y^4\right)^{1.5}}.\end{aligned}$$

ובאופן דומה נקבל עבור הנגזרת השנייה

$$\begin{aligned}f'_y(x,y)&=\frac{x\sqrt{x^2+y^4}-xy\frac{4y^3}{2\sqrt{x^2+y^4}}}{x^2+y^4}=\\&=\frac{x^3+xy^4-2xy^4}{\left(x^2+y^4\right)^{1.5}}=\frac{x^3-xy^4}{\left(x^2+y^4\right)^{1.5}}.\end{aligned}$$

כעת נעבור לחישוב הנגזרת בראשית.

$$\begin{aligned}f'_x(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\\&=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'_y(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\\&=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0.\end{aligned}$$

לכן מצאנו את הנגזרות בכל נקודה במישור.
בחלק זה היו טעויות רבות. הטעות הנפוצה הייתה אי מציאת נגזרת בראשית או לחילופין מציאת הנגזרת בראשית על ידי טענה שהנגזרת של 0 היא 0. זה כמובן לא נכון מאחר והערך של הפונקציה בנקודה איננו הדבר המשמעותי. בכל נקודה הערך של הפונקציה הוא קבוע ולכן אם היינו מתייחסים לערך של כל נקודה בגזירת כל פונקציה, תמיד היינו מקבלים 0. במקרה של ראשית הצירים חייבים להשתמש בהגזרת הנגזרת כי שמוצג לעיל.

2. נבדוק את הרציפות של הנגזרת בראשית הצירים. תחילה, נשים לב שהנגזרת מוגדרת בנקודה ושווה ל־0. היא רציפה אם הגבול שלה בנקודה גם שווה ל־0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^5}{(x^2+y^4)^{1.5}}.$$

נחשב את הגבול בעזרת מעבר לקואורדינטות פולריות $x = r\cos(\theta)$ ו־ $y = r\sin(\theta)$ ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^5}{(x^2+y^4)^{1.5}} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^5\sin^5(\theta)}{\left(r^2\cos^2(\theta)+r^4\sin^4(\theta)\right)^{1.5}} = \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^5\sin^5(\theta)}{(r^2)^{\frac{3}{2}}\left(\cos^2(\theta)+r^2\sin^4(\theta)\right)^{1.5}} = \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\sin^5(\theta)}{\left(\cos^2(\theta)+r^2\sin^4(\theta)\right)^{1.5}}.\end{aligned}$$

נשים לב שהמונה מתאפס אבל ייתכן שהמכנה מתאפס גם כן, תלוי בזווית θ. לדוגמא, אם $\theta = \frac{\pi}{2}$ אז הביטוי הוא מהצורה

$$\frac{r^2\sin^5(\theta)}{\left(\cos^2(\theta)+r^2\sin^4(\theta)\right)^{1.5}} = \frac{r^2\cdot 1^5}{(0+r^2\cdot 1^4)^{1.5}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

קיבלנו גבול שאינו שואף ל־0 כלל. הדרך היותר קלה לבדוק זאת היא לנסות לראות את הגבול על ידי בחירת כיוון מתאים. נניח כי אנו נעים לאפס לאורך העקומה $x = 0$ ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^5}{(0^2+y^4)^{1.5}} &= \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{y^6} = \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} = \pm\infty\end{aligned}$$

ולכן הנגזרת איננה רציפה. טעות נפוצה בחלק זה היא קבלת מכנה כלשהו ומונה חיובי וקביעה שהגבול הוא 0 ולכן הפונקציה רציפה, תוך התעלמות מהמכנה. זה עניין מאוד בסיסי בגבולות. לא ניתן לבצע אריתמטיקה של גבולות אם המכנה מתאפס ולכן זה מקרה שחייבים לקחת בחשבון. יחד עם זאת, בשל מורכבות החלק הזה, לא הורדו הרבה נקודות ספציפית על טעות שכזו.

10.6.3 חלק ג'

יש לענות על ארבע שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. תשובה ללא נימוק לא תתקבל.

תרגיל 10.50

1. הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ מתכנס.

2. נתונים שני טורים חיובים מתכנסים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. נסמן $M_n = \max\{a_n, b_n\}$ ו־$m_n = \min\{a_n, b_n\}$. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} m_n M_n$ מתכנס.

3. תהי f פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בנקודה (x_0, y_0). אזי קיים בהכרח וקטור כיוון $\underline{u}$ שעבורו $D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = 0$.

4. האינטגרל $\int_0^{\infty} \sin(e^{-x})\, dx$ מתבדר.

5. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ מקיימת $f^{(4)}(0) = 12$.

6. לכל פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ יש פונקציה קדומה.

פתרון:

1. לא נכון. נשתמש בתכונה של לוגריתם שאומרת שהלוגריתם של מכפלה שווה לסכום הלוגריתמים ולכן $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. מכאן נובע ש־

$$\ln(n!) < n \ln(n)$$

ולכן

$$\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln(n)}.$$

אלא שלפי משפט שראינו, אנו יודעים כי $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(n)}$ אינו מתכנס עבור $p \leq 1$ ולכן הטור הנתון מתבדר גם כן, כתוצאה ממשפט השוואה לטורים חיוביים. טעות נפוצה ־ ניסיון להשוות לטור ההרמוני (לא אפשרי במקרה זה), ניסיון להשוות לטור של $\frac{1}{\ln^2(n)}$ וטענה שטור זה מתכנס (למרות שהוא לא), ובנוסף בעיקר שימוש במבחן השוואה גבוליים והתעלמות מכך שהגבול יוצא 0 או אינסוף, או לחילופין, שימוש במבחן השורש והמנה והתעלמות מכך שהגבול הוא 1.

2. נכון. נשים לב ש־ $M_n \leq a_n + b_n$ ו־$m_n \leq a_n + b_n$ מאחר ומדובר בטורים חיוביים. מכאן נובע שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ מתכנסים גם כן (השוואה בין טורים חיובים מתכנסים והעובדה שסכום של טורים מתכנסים גם כן מתכנס). מאחר והטור $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ הוא טור חיובי מתכנס, נובע שהאיבר הכללי שלו שואף לאפס. לכן קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $m_n \leq 1$. נסתכל על הזנב של הטור המדובר מהאיבר ה־N. כל איבר $m_n M_n$ מקיים $m_n M_n \leq 1 \cdot M_n$ ולכן

$$\sum_{n=N}^{\infty} m_n M_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} M_n$$

והזנב של הטור המבוקש מתכנס ולכן גם הטור עצמו מתכנס. בסעיף זה היו טעויות רבות למרות שעשינו משהו כמעט זהה בכיתה ובבית. טעות שחזרה על עצמה היא הטענה שטור מתכנס אם האיברים שלו קטנים מ־1 ושואפים לאפס. זה לא נכון, והדוגמא הפשוטה לכך היא הטור ההרמוני.

3. נכון. נסתכל על הגרדיאנט של הפונקציה f בנקודה (x_0, y_0). מאחר והפונקציה גזירה ברציפות נובע שהגרדיאנט קיים. אם הגרדיאנט הוא $(0,0)$ אז כל כיוון שנבחר עדיין ייתן 0 ולכן נוכל להניח שהגרדיאנט איננו שווה ל־ $(0,0)$. נסתכל על וקטור הכיוון $\underline{u}$ המאונך לגרדיאנט. זאת אומרת, הוקטור (u_1, u_2) כך ש־

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= 1 \\ u_1 f'_x(x_0, y_0) + u_2 f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

מאחר ווקטור כזה קיים, אז הנגזרת הכיוונית על פי כיוון זה תהיה שווה לאפס (הכיוון מאונך לגרדיאנט). טעות שחזרה על עצמה היא בחירת וקטור כיוון כ־ $(0,0)$. זה לא וקטור כיוון.

4. לא נכון. נבצע החלפת משתנים תחילה $t = e^{-x}$ ולכן $\frac{dt}{dx} = -e^{-x} = -t$ ונקבל

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin\left(e^{-x}\right) dx &= \int_1^0 -\frac{\sin(t)}{t} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

נשתמש בטור טיילור ונקבל

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} \end{aligned}$$

נשים לב שמדובר בטור לייבניץ. לכן טור זה מתכנס ובפרט האינטגרל מתכנס. מסיבה לא ברורה, הרבה סטודנטים רשמו שהקדומה של $\sin\left(e^{-x}\right)$ היא $\cos\left(e^{-x}\right)$ ולפעמים עם חלוקה או כפל ב־e^{-x}. זה לא נכון וניתן לראות זה בפשטות על ידי גזירה של הקדומה. במקומות נוספים הייתה גם כן התעלמות מכך שיש נגזרות פנימיות ולכן הקדומה שנבחרה איננה מתאימה.

5. נכון. נשים לב שהמקדם של x^4 בפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ הוא $a_4 = \frac{(-1)^2}{2}$ ולכן

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= a_4 \cdot 4! = \\ &= 12. \end{aligned}$$

6. לא נכון. נסתכל על הפונקציה הבאה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

נשים לב שמדובר בפונקציה לא רציפה בקטע $[-1,1]$, אבל היא אינטגרבילית בקטע הזה מאחר ולפי ההגדרה הסכום התחתון שווה ל־0 והסכום העליון שואף ל־0. כעת

צריך לראות האם יש לפונקציה הנתונה פונקציה קדומה $F(x)$. נניח בשלילה שקיימת. בגלל שהנגזרת שווה ל־0 בכל נקודה $x \neq 0$ נובע שהפונקציה קבועה בקטע זה,קרי $F(x) = c$ כאשר $x \neq 0$. נבדוק את הנגזרת ב־0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - f(0)}{h}.$$

נשים לב שהמונה קבוע. אם המונה שונה מ־0 אז נקבל שהגבול הוא אינסופי (מכנה מתאפס) ולכן לא מתקיים שהנגזרת אכן שווה ל־1. האלטרנטיבה היא שהמונה הוא 0. במקרה כזה הגבול הוא 0 ועדיין נקבל סתירה לכך שהנגזרת היא 1. על כן F כזאת לא קיימת והטענה איננה נכונה. בסעיף זה היו טעויות רבות שרובן היו טכניות. דבר ראשון, רוב הסטודנטים נתנו רק דוגמא ראשונית לפונקציה תוך טענה שהיא אינטגרבילית ואין לה קדומה, אבל לא הוכיחו זאת. חשוב לשים לב! אם מציגים פונקציה וטוענים שאין לה קדומה אז חייבים להוכיח זאת. הטענה שלפונקציה כלשהי אין קדומה, בגלל שהיא לא רציפה, לא הוכחה על ידינו וגם לא נובעת ממשפטים שראינו בשיעור ובתרגול. המשפטים שראינו דיברו על אינטגרביליות של פונקציות רציפות וקיום של קדומות ולא להיפך. בנוסף, בדף הדוגמא לשאלות הוכחה או הפרך שפורסם לפני המבחן ישנה שאלה זאת עם פתרון מלא. רבים רשמו דברים דומים אבל לא מדוייקים שלמעשה לא מפריכים את הטענה. מומלץ לעבור על זה שוב.

10.7 מבחן מועד ב' - ד"ר יוסי שמאי, סמסטר ב' 2015.

10.7.1 חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בדיוק מבין צמד השאלות הבאות.

תרגיל 10.51

1. הוכיחו את נוסחת השארית לפי לגרנז'.
2. תהי f פונקציה הגזירה אינסוף פעמים בכל נקודה על הישר, כך ש־$f^{(17)}\left(x\right)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי $f\left(x\right)$ היא פולינום ממעלה 16.

פתרון:

1. על פי הוכחה שראינו בשיעור.
2. נסתכל על שארית לגראנג' מסדר 16 של הפונקציה. לפי ההגדרה נובע ש־

$$R_{16}\left(x\right)=f\left(x\right)-T_{16}\left(x\right),$$

ובנוסף, נוסחת השארית לפי לגראנג' קובעת שלכל קטע $[x_0,x]$, קיימת נקודה $c\in[x_0,x]$ שעבורה

$$R_{16}\left(x\right)=\frac{f^{(17)}\left(c\right)}{17!}\left(x-x_0\right)^{17}.$$

אם נשתמש בנתון שהנגזרת מסדר 17 מתאפסת בכל נקודה נקבל ש־

$$\begin{aligned}R_{16}\left(x\right)&=0=f\left(x\right)-T_{16}\left(x\right)\\ \Rightarrow f\left(x\right)&=T_{16}\left(x\right)\end{aligned}$$

בכל נקודה בתחום ההתכנסות של הטור טיילור, שזה למעשה פולינום מסדר 16(סופי). ולכן הפונקציה שווה לפולינום טיילור שלה מסדר 16 כנדרש.

תרגיל 10.52

1. נסחו והוכיחו את קריטריון לייבניץ להתכנסות.
2. הוכיחו כי הטור הבא מתכנס בתנאי $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^2-1}{n^3-1}$.

פתרון:

1. על פי הוכחה שראינו בשיעור.

2. תחילה נוכיח כי הטור אינו מתכנס בהחלט. נסתכל על הטור המתאים $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3-1}$ ונשתמש במשפט השוואה גבולי לטורים חיובים עם הטור ההרמוני.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-1}{n^3-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n}{n^3-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^{-2}}{1-n^{-3}}=1,$$

ולכן הטורים מתבדרים יחדיו. כעת נוכיח כי מדובר בטור לייבניץ. הטור הוא מצורה של טור לייבניץ מבחינת הסימנים המתחלפים. בנוסף האיבר הכללי שלהטור שואף לאפס כי

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^{-2}}{n-n^{-2}}=0$$

יחד עם זאת, נוכיח כי הסדרה המרכיבה את איברי הטור היא מונוטונית יורדת.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^3-1}}{\frac{n^2-1}{n^3-1}}=$$
$$=\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^3-1}=$$
$$=\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^3-1}$$

נגדיר פונקציה $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^3-1\right)-3x^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^3-1\right)^2}=$$
$$=\frac{2x^4-2x-3x^4+3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}=$$
$$=\frac{-x^4+3x^2-2x}{\left(x^3-1\right)^2}=$$
$$=\frac{-x^3+3x-2}{\left(x^3-1\right)^2}\cdot x$$

נבחן את הביטוי $-x^3+3x-2$ עבור $x\geq 2$. נשים לב ש־ $x\cdot x^2\geq 4x$ ולכן $-x^3\leq -4x$.

$$-x^3+3x-2<-4x+3x-2=$$
$$=-4x-2<0$$

ולכן נקבל שהפונקציה

$$f'(x)=x\cdot\frac{-x^3+3x-2}{\left(x^3-1\right)^2}<0$$

כנדרש. מכאן נובע שמדובר בטור לייבניץ.

10.7.2 חלק ב'

יש לענות על 2 שאלות בדיוק מבין 3 השאלות הבאות.

תרגיל 10.53 הראו כי הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln^{\alpha}(\ln(n))}$ מתכנס עבור $\alpha>1$ ומתבדר עבור $\alpha\leq 1$.

פתרון: מאחר ומדובר בטור חיובי, בכדי להוכיח שהטור מתבדר לכל $\alpha\leq 1$ מספיק להוכיח שהטור מתבדר עבור $\alpha=1$. זה נובע מכך ש־

$$n\cdot\ln(n)\cdot\ln^{\alpha}(\ln(n))<n\cdot\ln(n)\cdot\ln^{1}(\ln(n))$$
$$\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))}<\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln^{\alpha}(\ln(n))}$$

ולכן אם הטור מתבדר ב־$\alpha=1$ הוא מתבדר לכל $\alpha\leq 1$. לכן נסתכל על הטור

$$.\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))}$$

נשתמש במבחן האינטגרל. נגדיר את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)\cdot\ln^{\alpha}(\ln(x))}$ עבור $\alpha\geq 1$ לכל $x\geq 3$. נבדוק שהפונקציה עומדת בתנאים הרלוונטיים:

1. הפונקציה רציפה בתור מנה של פונקציות רציפות והמכנה אינו מתאפס בשום שלב (תמיד חיובי).
2. הפונקציה מונוטונית יורדת מאחר והמונה קבוע והמכנה מונוטונית עולה לכל $x\geq 3$.
3. הפונקציה שווה לסדרה לכל $x\geq 3$, $x\in\mathbb{N}$.

לכן התנאים הבסיסיים למשפט מתקיימים. נבחן כעת מתי האינטגרל מתכנס.

$$\begin{aligned}
\int_{3}^{\infty}f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{3}^{b}\frac{1}{x\ln(x)\cdot\ln^{\alpha}(\ln(x))}dx=\\
&\underset{y=\ln(\ln(x)),\ dy=\frac{1}{x\ln(x)}dx}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(b))}\frac{1}{y^{\alpha}}dy=\\
&= \begin{cases}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(y)\right]_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(b))} & \alpha=1\\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(y)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(b))} & \alpha\neq 1\end{cases}\\
&= \begin{cases}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(\ln(b)))-\ln(\ln(\ln(3)))\right] & \alpha=1\\ \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln(\ln(b)))^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{(\ln(\ln(3)))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] & \alpha\neq 1\end{cases}\\
&= \begin{cases}\infty & \alpha=1\\ -\frac{(\ln(\ln(3)))^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha>1\\ \infty & \alpha<1\end{cases}
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו שעבור $\alpha \leq 1$ הטור לא מתכנס ואחרת הטור מתכנס, כנדרש.

תרגיל 10.54 תהיי $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

1. חשבו את $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ בנקודות בהן הן קיימות.
2. קבעו לאילו ערכי (x,y) הפונקציות $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ רציפות.
3. תהיי $\gamma(t):[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ מסילה גזירה שעבורה $\gamma(0)=(1,2)$ ו־$\gamma'(0)=(-1,3)$. נסמן $g(t)=(f\circ\gamma)(t)$. חשבו את $g'(0)$.

פתרון:

1. נשים לב שהפונקציה מוגדרת ורציפה בכל נקודה במישור. בנוסף, לפי אריתמטיקה שח פונקציות גזירות נקבל שלכל $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$f'_y(x,y)=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

עבור הנקודה $(x,y)=(0,0)$ נבדוק בעזרת הגדרת הנגזרת.

$$\begin{aligned}f'_x(x,y)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\\&=\begin{cases}-1 & x\to0^-\\1 & x\to0^+\end{cases}\end{aligned}$$

ולכן הנגזרת לא קיימת. באופן סימטרי לחלוטין נקבל את אותה התוצאה עבור הנגזרת לפי y בנקודה.

2. נבחן באילו נקודות $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציות

$$f'_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,\quad f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

רציפות. נשים לב שבכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציות הללו רציפות מאריתמטיקה של פונקציות רציפות וזאת כי המונה הוא פונקציה רציפה והמכנה הוא הרכבה, חיבור וכפל של פונקציות צריפות ובנוסף, איננו מתאפס.

3. נשתמש בכלל השרשרת. אם

$$g(t)=f(\gamma_1(t),\gamma_2(t)).$$

אזי,

$$\begin{aligned}
g'(0) &= f'_x(\gamma_1(0),\gamma_2(0))\cdot\gamma'_1(0)+f'_y(\gamma_1(0),\gamma_2(0))\cdot\gamma'_2(0)= \\
&= f'_x(1,2)\cdot(-1)+f'_y(1,2)\cdot 3= \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}+\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}\cdot 3= \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

תרגיל 10.55

1. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס או מתבדר $\int_0^1 \cos(x)\ln(x)\,dx$.
2. תהא f פונקציה הגזירה פעמיים ברציפות על הישר. נתון כי $f'(2)=4$, $f(0)=1$ ו־$f(2)=7$. חשבו את $\int_0^1 tf''(2t)\,dt$.

פתרון:

1. נשתמש באינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(x)\ln(x)\,dx &= \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \cos(x)\ln(x)\,dx= \\
&= \lim_{b\to 0^+}\left[\left(\sin(x)\ln(x)\right)|_b^1-\int_b^1\frac{\sin(x)}{x}dx\right]= \\
&= \lim_{b\to 0^+}\left[0-\left(\sin(b)\ln(b)\right)-\int_b^1\frac{\sin(x)}{x}dx\right]
\end{aligned}$$

עבור האיבר השני נוכל להשתמש בטור טיילור. נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+}\int_b^1\frac{\sin(t)}{t}dt &= \lim_{b\to 0^+}\int_b^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}
\end{aligned}$$

קיבלנו טור לייבניץ. לכן טור זה מתכנס ובפרט האינטגרל מתכנס. נסתכל על הגבול שמתקבל מהאיבר הראשון ונחשב אותו בעזרת כלל לופיטל.

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^+}\sin(b)\ln(b) &= \lim_{b\to 0^+}\frac{\ln(b)}{\frac{1}{\sin(b)}}= \\
&\overset{L}{=} \lim_{b\to 0^+}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{-\cos(b)}{\sin^2(b)}}= \\
&= \lim_{b\to 0^+}\frac{\sin^2(b)}{-\cos(b)\,b}= \\
&= \lim_{b\to 0^+}\frac{\sin(b)}{b}\cdot\frac{\sin(b)}{-\cos(b)}=1\cdot 0=1.
\end{aligned}$$

לכן האינטגרל מתכנס.

2. נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned}\int_0^1 tf''(2t)\,dt \underset{x=2t,\ dx=2dt}{=} \int_0^2 \frac{x}{2}f''(x)\,\frac{dx}{2} &= \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 xf''(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{4}xf'(x)\,|_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 f'(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{4}\left[2f'(2) - 0f'(0)\right] - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[8-0\right] - \frac{1}{4}\left[7-1\right] = \\ &= 2 - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

10.7.3 חלק ג'

יש לענות על 4 שאלות בדיוק מבין 6 השאלות הבאות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. תשובה ללא נימוק לא תתקבל.

תרגיל 10.56

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ מתכנס בתנאי.
2. לטור טיילור סביב $x_0=1$ של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{2+x}$ יש רדיוס התכנסות השווה ל־3.
3. יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות R_1, R_2 בהתאמה. אזי רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}(na_n-b_n)x^n$ הוא לפחות $\min(R_1,R_2)$.
4. אם $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה ואי־שלילית כך ש־ $\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ מתכנס.
5. מתקיים $\frac{3\pi}{4} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{2}$.
6. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ונתון וקטור הכיוון $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. אזי הנגזרת הכיוונית של $f(x,y)$ בכיוון u ב־$(0,0)$ לא קיימת.

פתרון:

1. טענה לא נכונה. נניח בשלילה שהטור מתכנס. נסתכל על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. מדובר בטור לייבניץ מאחר ויש לו סימנים מתחלפים, שאיפה לאפס ומונוטוניות של הסדרה המרכיבה את הטור. לכן הוא מתכנס. מכאן נובע שהטור המקורי פחות הטור הנתון מתכנס גם כן מאריתמטיקה של טורים מתכנסים. על כן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}+1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}+1-(-1)^n \sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

קיבלנו שהטור ההרמוני מתכנס וזו סתירה.

2. טענה נכונה. נמצא את הטור טיילור של הפונקציה $\frac{1}{2+x}$. נשים לב ש־

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{3+(x-1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \\ &\overset{t=-\frac{x-1}{3}}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-t} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(-\frac{x-1}{3}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}.\end{aligned}$$

זהו טור טיילור של הפונקציה סביב $x_0 = 1$. נמצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\right|^{\frac{1}{n}}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \frac{1}{3}} = 3,\end{aligned}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור שחישבנו הוא 3 וגם עבור הטור של הפונקציה הנתונה בשאלה:

$$\frac{x}{x+2} == \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)^n}{3^{n+1}}.$$

3. טענה נכונה. ניקח $-\min(R_1,R_2) < r < \min(R_1,R_2)$ ונבדוק אם הטור החדש מתכנס עבור $x = r$. ברור כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ מתכנס מאחר ו־ r נמצא בתחום ההתכנסות של הטור. אותו הדבר נכון גם עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. התכנסות הטור האחרון אומרת שגם הטור הבא, שהוא נגזרת של הטור הקודם כאשר גוזרים כל איבר בנפרד לפי x בנקודה $x = r$, מתכנס גם כן, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^{n-1}$. על כן, אם נכפול את הטור האחרון ב־r נקבל שהטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^n .$$

נשתמש באריתמטיקה של טורים מתכנסים ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n a_n - b_n) r^n$$

מתכנס כנדרש.

4. טענה לא נכונה ונוכיח זאת בעזרת דוגמא. נתאר פונקציה רציפה, אי־שלילית שהאינטגרל שלה מתכנס אבל הטור הנתון לא מתכנס. לשפ הפשטות נמנע מתיאור אלגברי של הפונקציה ורק נסביר את צורתה. נבנה תחילה מעט כלי עזר. נניח כי סביב כל נקודה $2 \leq n \in \mathbb{N}$ יש משולש סימטרי סביב n ברוחב $\frac{1}{n^2}$ ובגובה 1. זאת אומרת, ניקח את ציר המספרים וסביב המספר 2, לדוגמא נצייר קו באורך $\frac{1}{4}$, קרי הקטע $\left[2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right]$ ונמתח קן מקצוות הקטע לנקודה $(2,1)$ הנמצאת בגובה 1 מעל לנקודה 2. לדוגמא עבור $n = 10$ נסתכל על המשולש בגובה 1שבסיסו הוא הקטע $\left[10-\frac{1}{100}, 10+\frac{1}{100}\right]$ והקודקוד שלו הוא מעל הנקודה 10בגובה 1. לאחר ציור כל המשולשים הנ"ל נחבר בינהם בעזרת קו שנע על ציר ה־x ונקבל למעשה פונקציה כפי שמוצגת בתרשים 29:

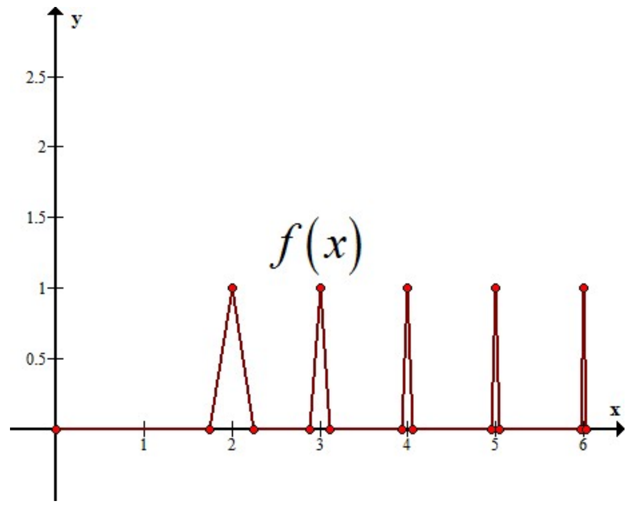
נשים לב שמדובר בפונקציה רציפה ואי־שלילית והאינטגרל המסויים הנתון בשאלה הוא למעשה השטח שבין גרף הפונקציה וציר x. במקרה הנוכחי מדובר בסכום השטחים של המשולשים. השטח של כל משולש מעל נקודה n הוא

$$S_{Triangle} = \frac{1 \cdot \frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

ואם נחשב את הסכום $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ נקבל שהטור מתכנס וזהו מספר סופי. יחד עם זאת הטור המדובר בשאלה מתבדר כי $f(n) = 1$ לכל $n \geq 2$ ולכן

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \sum_{n=2}^{N} 1 = N - 1 \to \infty \quad \text{as} \quad N \to \infty .$$

5. נשתמש במבחן האינטגרל בכדי להוכיח כי $\frac{\pi}{2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{3\pi}{4}$. תהיי פונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. זוהי פונקציה חיובית, מונוטונית יורדת כאשר $x \geq 0$ ושואפת לאפס



איור 29: פונקצה רציפה ואי־שלילית עבורה $\int_0^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתבדר.

כאשר $x \to \infty$. נחשב את האינטגרל

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(b) - \arctan(0)\right] =\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

נשים לב שמדובר בחסם תחתון לטור הנתון. זה נובע מכך שאם נשרטט את המלבנים שנקבעים ע"פ הטור (רוחב כל מלבן הוא 1 וגובהו כערך של כל איבר בטור) נראה שהפונקציה עוברת מתחת לצלע העליונה של כל אחד מהמלבנים. כאשר הפונקציה היא מונוטונית יורדת היא פוגשת את המלבנים שנקבעים על ידי הטור רק בערכים השלמים ובין ערכים שלמים היא נמצאת מתחת לגובה הרלוונטי. על כן הוכחנו את החסם התחתון. מכאן כבר נוכל להבין שהטענה לא נכונה, מאחר והטור גדול ממש מהחסם התחתון ולכן לא מקיים את התנאי שבשאלה. למרות שאין בכך צורך, נחשב את החסם העליון. בכדי לחשב את החסם העליון נחשב את האינטגרל מ־-1 עד אינסוף. בצורה זאת נקבל שבכל מקטע הפונקציה גבוהה מכל מלבן רלוונטי ולכן נקבל חסם עליון.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{-1}^b \frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(b) - \arctan(-1)\right] =\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

לכן הטענה נכונה והחסמים מתאימים.

6. הטענה נכונה. נשתמש בהגדרה לנגזרת כיוונית.

$$\begin{aligned}D_u(f)(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+hu)-f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-0}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h\sqrt{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{(\sqrt{2})^3}+\frac{h}{2}}{\sqrt{h^2}} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+\sqrt{2}h}{\sqrt{h^2}\left(\sqrt{2}\right)^3}.\end{aligned}$$

נחשב את הגבול מהכיוון החיובי ומהכיוון השלילי. נשים לב שלפני שצימצמנו, הביטוי כלל איברים ממעלה ראשונה וממעלה שלישית h,h^3 ולכן כאשר $h<0$ אז הסימן שלהם הוא שלילי, בניגוד לביטויים מהצורה h^2 אשר תמיד יהיו חיוביים.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\left|h^2\right|+\sqrt{2}\left|h\right|}{\left|h\right|\left(\sqrt{2}\right)^3} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\left|h\right|+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-\left|h^2\right|+\sqrt{2}\left|h\right|}{-\left|h\right|\left(\sqrt{2}\right)^3} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-\left|h\right|+\sqrt{2}}{-\left(\sqrt{2}\right)^3} = -\frac{1}{2}.$$

לכן הגבול לא קיים והנגזרת הכיוונית גם כן לא קיימת.